J. SANCHO SAN ROMAN

ALGEBRA LINEAL Y GEOMETRIA

ALGEBRA LINEAL Y GEOMETRIA

por

J. SANCHO SAN ROMÁN
Catedrático de la Universidad
de Zaragoza.

DEPOSITO LEGAL - M - 15828 - 1971
COPIGRAF, S.L. - Ibiza, 52 - MADRID - (9)

LISTA DE SIMBOLOS

El número indica la página donde está definido.

$\in$, $\notin$	pg. 1
$\{a,b,c\}$	1
N^*, N	2
Z , Q	2
R , C	2
$\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$	2
$\not\Rightarrow$	2
$\exists$, $\nexists$	3
$\forall$	3
$\subset$, $\supset$	3
$P(E)$	3
A^c	3
$\emptyset$	4
$\cap$, $\cup$	4
$E \times G$, E^n	5
$\mapsto$, $\longrightarrow$	6
$f(a)$, fa	6
$\mathrm{Im}\, f$	6
f^{-1}	7
1_E	8
$g.f$	9
aRb	10
$[a]$	12
E/R	13
$(.)$ $(*)$	17
$(+)$	20
a^{-1}, $-a$	22
$(E,+,*)$	25
aS , Sa	30
G/S	31
Z/Zp	32
$\mathrm{Ker}\, f$	33
$S(n)$	36
$\mathrm{sig}\, \alpha$	38
$a + B$	44
$\vert$	45
$\overline{AB}$	49
K	51
V	51
K^n	52
$\bar{0}$	52
$S_1 + S_2$	55
$S_1 \oplus S_2$	55
$K(a_1,\ldots,a_p)$	56
$K(a_i)$	56
$\dim V$, $\dim S$	62
$\mathrm{rang}\, F$	63
0_V , 0_W	67
$\mathrm{rang}\, f$	69
$\mathrm{Hom}(V,W)$	73
$\mathrm{End}(V)$	74
$GL(V)$	74
A_i, A^j	76
$[A_1^1,\ldots,A_h^h]$	77
A'	77
(0)	78
$M(n\times m)$	78
E_i^j	79
X'	80
I_n	82
$M(n)$	84
$GL(n)$	85
$\mathrm{rang}\, A$	91
e_α , αf	96
$\vert A\vert$	101
$P + v$	109
$0,A_1,A_2$	112
vw , v^2	140
S^o	143
$/v/$, $\vert v\vert$	148
$O(n)$, $O^+(n)$	153
$\vert PQ\vert$	159
$u \wedge v$	164
$(a_1a_2a_3)$	164
$GE(3)$	174
A^*	177
$GE(4)$	182
X'	173

$\langle\rangle$ indica fin de una demostración

I

PREAMBULO.

El presente curso de Algebra Lineal y Geometria, sigue el temario oficial correspondiente a la asignatura de Algebra Lineal, del Curso Selectivo (Facultades de Ciencias y Escuelas Técnicas Superiores).

Está redactado sobre las lecciones explicadas por el autor durante el curso 1968-69, en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza.

Un curso como el que nos ocupa, ha de proporcionar una serie de conocimientos necesarios, pero ha de hacerlo de manera que su adquisición sea medio de formación mental, y de desarrollo de la capacidad creadora. Información y formación son los dos objetivos a alcanzar, en cuyo adecuado equilibrio está la clave del éxito; se complementan de tal modo, que la desatención a cualquiera de ellos, priva automáticamente al otro de una ayuda imprescindible.

Así, dar un curso sin seguir ningún libro en particular, obliga al alumno a tomar y revisar apuntes, lo cual tiene la virtud de ser muy formativo. Pero tiene el defecto de constituir una tarea que, al menos en 1º y 2º año, pocos alumnos son capaces de realizar con suficiente perfección; para la mayoría resulta un obstáculo en vez de una ayuda.

Al otro extremo está el apoyar el curso en un libro de exposición exhaustiva, que da pocas oportunidades al alumno de discurrir en forma original, y le impulsa a una actitud pasiva. Ello se incrementa si la clase no añade nada nuevo a lo explicado en el libro.

La posición intermedia hoy más admitida, considera conveniente que el alumno disponga de un texto del curso, pero escrito de manera que, por un lado, le sirva de ayuda en las cuestiones más difíciles para él, y por otro le impulse a desarrollar su capacidad creadora, dejando a su cuidado la resolución de las cuestiones más sencillas.

Con esta intención está redactado el presente curso, en el cual se proponen continuamente demostraciones cuya realización se estima accesible a las posibilidades del alumno. Puede ser que en algún caso hayamos estimado fácil lo que es difícil, y viceversa, pero el conjunto de lo expuesto y lo propuesto creemos que presenta una proporción equilibrada.

Innecesario parece advertir, aunque en realidad sí es necesario, que todo el plan de formación del alumno se viene abajo, si este rehuye la resolución de las cuestiones, por comodidad ó por ganar tiempo, acogiéndose al fácil recurso de leerlas resueltas. La experiencia indica que es muy fuerte esta tentación, a pesar de ser sincero su deseo de formarse. Por lo cual, debe estar prevenido contra ella.

Finalmente, una observación técnica. En los cursos de iniciación al Algebra Lineal, como este, es frecuente ver incluido y utilizado el concepto de espacio vectorial dual y el de aplicación lineal adjunta. Nosotros lo hemos considerado innecesario, y creemos que su lugar más adecuado es en un 2º curso de Algebra lineal.

Zaragoza, 1969.

INDICE.

Lección 8

Lección 9

Lección 10

Lección 11

Lección 12

Lección 13

Lección 14

Lección 15

Lección 16

Lección 17

Lección 18

Lección 19

Lección 20

Lección 21

Lección 22

Lección 23

LECCION 1

1.CONJUNTO. NOTACIONES.

La noción de conjunto es "primitiva", esto es, cualquier explicación sobre el significado de la palabra conjunto, utilizaría conceptos más complicados que el que se pretende definir. Lo mismo sucede con la mayoría de las palabras que designan conceptos fundamentales de la mente humana. Esta imposibilidad de precisar el significado de tales palabras, viene compensadá por el hecho de que en la práctica, existe una coincidencia suficiente sobre el sentido que cada persona da a la palabra en cuestión.

Así sucede en particular, con la palabra conjunto y con las que indican los conceptos más elementales anejos: elemento de un conjunto y pertenecer a un conjunto.

Notemos que, teniendo cualquier palabra algunas sinónimas, cuanto más estas fundamentales. Conjunto, colección, clase, familia, sistema, son sinónimos en el lenguaje ordinario. Lo mismo sucede con: elemento, miembro, objeto. Tambien: pertenecer a, ser de, estar contenido en, estar incluido en.

Notaciones.

Interesa enunciar a continuación, el significado de ciertos símbolos escritos, muy útiles por su carácter abreviatorio. No solo se usan los símbolos con gran profusión en Matemáticas, sino que constituyen en realidad uno de los instrumentos más típicos y eficaces de la Matemática. Comencemos citando los siguientes:

$a \in E$, significa: $\underline{a}$ es elemento del conjunto E.

$a \notin E$, denota que no pertenece a E.

$E = \{a, b, c\}$, significa: el conjunto E se compone de los elementos $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.

$E = \{a, b, \ldots\}$, indica que E se compone de los elementos $\underline{a}$, $\underline{b}$, y otros.

Algunos conjuntos cuyo uso es frecuente, se designan con símbolos determinados:

N^*= conjunto de los números naturales.

$N = N^*$ más el cero.

Z = conjunto de los números enteros.

Q = conjunto de los racionales.

R = conjunto de los números reales.

C = conjunto de los números complejos.

2. SIMBOLOS PROPOSICIONALES. CUANTIFICADORES.

El concepto "proposición" es tambien básico. Se suele entender por tal, la expresión de que sucede un hecho. Si este realmente sucede, la proposición se dice verdadera, y en caso contrario falsa.

Pues bien, si siempre que una proposición J es verdadera, tambien lo es otra K, se dice que J implica K ; en tal caso, J es condición suficiente para que se cumpla K, y K necesaria para que se cumpla J. Se escribe:

$J \Rightarrow K$ (implicación lógica).

Cuando no solo J implica K, sino que además K implica J, las proposiciones J y K se dicen lógicamente equivalentes ; entonces, el hecho J sucede si y solo si sucede el K; tambien se dice que J es condición necesaria y suficiente para que se cumpla K. Se escribe:

$J \Leftrightarrow K$ (equivalencia lógica).

Cuando un elemento $\underline{a}$ de un conjunto E, es sujeto de una proposición J, se dice que $\underline{a}$ tiene la cualidad ó propiedad P expresada por J. Tambien se dice: $\underline{a}$ es tal que tiene P (ó cumple, verifica, satisface a P). Se escribe:

$a \not\mid$ a tiene P , ó: $a \mid$ a cumple P.

Por ejemplo, $\{a \mid a \in Z , a < 0\}$ = conjunto de los números enteros negativos.

Una manera muy frecuente de definir un conjunto E, consiste en dar una serie de propiedades que solo poseen, todas, los elementos de E. En el ejemplo precedente, el conjunto viene definido por dos propiedades. Otras veces, viene dado por una sola, que se dice propiedad característica del conjunto.

Símbolos cuantificadores.

Si existe algún elemento de un conjunto E, que posee la propiedad P, ello se indica así:

$$(\exists\ a \in E)\ a \text{ cumple } P.$$

Si existe solo uno, $\exists$ se sustituye por $\exists!$. Si no existe ninguno, se pone $\nexists$ en lugar de $\exists$.

Finalmente, cuando todos los elementos de E cumplen P, se escribe:

$$(\forall\ a \in E)\ a \text{ cumple } P.$$

EJERCICIO:

1. Expresar con ayuda de los símbolos precedentes, implicaciones, equivalencias y conjuntos definidos mediante propiedades.

3. SUBCONJUNTOS. INTERSECCION Y REUNION.

Un conjunto A se dice subconjunto de un conjunto E, si cada elemento de A lo es de E. Tambien se dice entonces, que A está contenido en E, ó que es una parte de E. Se escribe:

$$A \subset E\ ,\ \text{ó}\quad E \supset A.$$

Según esto, $E \subset E$, pero en tal caso decimos que la inclusión no es estricta. Cuando $A \subset E$, y E posee algún elemento que no es de A ($A \neq E$), se dice que la inclusión es estricta, y que A es subconjunto propio de E.

Notemos que:

$$A \subset E \ \text{ y } \ E \subset A \iff A = E.$$

Esta doble inclusión es el criterio más usado para probar que dos conjuntos son el mismo.

La colección de todos los subconjuntos de E, es un conjunto cuyos elementos son dichos subconjuntos, y se suele designar con el nombre de conjunto de las partes de E ; se escribe $\mathcal{P}(E)$. Su estudio es muy importante, como veremos en lo sucesivo.

DEFINICION 1: Dado un subconjunto A de E, se llama complementario de A (respecto de E), al conjunto de los elementos de E que no son de A. Le indicaremos: A^c.

Es claro que cada subconjunto propio de E posee un complementario. En cuanto al subconjunto E, su complementario no posee elemento alguno, y cabe considerar que no existe E^c ; sin embargo, como esta excepción sería incómoda en el estudio de P(E) , se acepta el convenio siguiente:"E posee complementario E^c " Este conjunto, caracterizado por no poseer ningún elemento, recibe el nombre de <u>conjunto vacio</u>, y se indica con el símbolo $\emptyset$.

EJERCICIO:

2. Demostrar que $(A^c)^c = A$.

DEFINICION 2: Sea {A, B, ...} una familia de partes de E, Se llama <u>intersección</u> de la familia, ó de los conjuntos de ella, al conjunto I formado por los elementos comunes a todos los miembros de la familia. Se escribe:

$$I = \cap\{A;B,\ldots\} = A \cap B \cap \ldots \quad .$$

En el caso de dos miembros, si $A \cap B = \emptyset$, se dice que A y B son <u>disjuntos</u>.

DEFINICION 3: Se dice <u>reunión</u> de una familia de partes de E, al conjunto U compuesto por los elementos que pertenecen a una (al menos) de dichas partes. Se escribe:

$$U = \cup\{A,B,\ldots\} = A \cup B \cup \ldots \quad .$$

EJERCICIO:

3. Demostrar que: $B = A^c \Longleftrightarrow A \cup B = E$ y $A \cap B = \emptyset$.

DEFINICION 4: Una <u>partición</u> de un conjunto E, es una familia F de partes de E, ninguna vacía tal que cada elemento de E pertenece a uno y solo un miembro de F. Los subconjuntos en que queda así dividido E, es decir, los elementos de F, se dicen <u>clases</u> de la partición.

EJERCICIOS:

4. Dar ejemplos diversos de particiones.
5. Probar que F es una partición de E, si y solo si cumple: 1°) La reunión de F es igual a E; 2°) cada dos miembros de F son disjuntos.
6. Definir mediante símbolos, los conjuntos: A^c , $A \cap B$, $A \cup B$.

7. Demostrar que: $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.

4. CONJUNTO PRODUCTO.

Llamaremos <u>par</u> (a,b) a un conjunto de dos objetos <u>a</u> y <u>b</u>, donde <u>a</u> está señalado como primero y <u>b</u> como segundo. Es decir, $(a,b) \neq (b,a)$ en general.

Este es uno de los muchos ejemplos en que una palabra (aquí <u>par</u>) no tiene exactamente el mismo significado en el lenguaje corriente que en Matemáticas; conviene estar avisado sobre este particular, porque induce fácilmente a confusiones.

Analogamente, llamaremos <u>terna</u> (a,b,c) a un conjunto de tres objetos, donde <u>a</u> está considerado como primero, <u>b</u> como segundo y <u>c</u> como tercero. Siguiendo así, definiremos cuaterna, quíntupla, séxtupla, etc. y en general, enetupla (n-tupla).

DEFINICION 5: Dados dos conjuntos E y G, el conjunto de todos los pares (e,g) tales que <u>e</u> pertenece a E y <u>g</u> a G, se llama <u>conjunto producto</u> de E por G, y tambien <u>producto cartesiano</u> de E por G. Se escribe: $E \times G$.

De igual manera se define el conjunto producto $E_1 \times \ldots \times E_n$ de una n-tupla de conjuntos.

El producto de <u>n</u> conjuntos iguales a E, se suele escribir E^n, si no hay lugar a confusión.

EJERCICIO:

8. Dar ejemplos de conjuntos producto.

LECCION 2

1. APLICACION. NOMENCLATURA Y NOTACIONES.

DEFINICION 1: Dados dos conjuntos A y B, una <u>aplicación f de A en B</u>, es una ley, un criterio, que permite asociar a cada elemento <u>a</u> de A uno y solo uno de B.

El conjunto A se dice <u>conjunto inicial</u> de f, y el B conjunto <u>final</u>.

Si f asocia el elemento <u>b</u> al elemento <u>a</u>, se dice que <u>b</u> es

<u>la imagen</u> de <u>a</u> (respecto de f), y tambien, que <u>a</u> es <u>una antiimagen</u> de <u>b</u>. Se escribe entonces:

$$f(a) = b \ . \quad ó \quad f: a \mapsto b \ .$$

Por comodidad tipográfica escribiremos a veces: <u>fa</u> en lugar de f(a).

Para indicar que f es aplicación de A en B, se pone:

$$f: A \rightarrow B \ .$$

Cuando A y B son conjuntos de números, en vez de la palabra aplicación, se usa a veces el nombre de <u>función uniforme</u> ó <u>unívoca</u>. EJEMPLO: la aplicación $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por : $f(x) = x^2$.

Si A y B son conjuntos de elementos geométricos, la aplicación es una <u>transformación geométrica</u>. EJEMPLO: la aplicación f: plano → plano , dada por una homotecia, ó por una traslación.

Bastan los ejemplos anteriores, para destacar la importancia del concepto de aplicación, del que son simples casos particulares.

DEFINICION 2: Dada una aplicación $f: A \rightarrow B$, y una parte A_1 de A, se llama <u>imagen de A_1</u> (por f), y se indica $f(A_1)$, al conjunto de las imágenes de todos los elementos de A_1.

El conjunto f(A) se dice <u>conjunto imagen de f</u> , y se representa tambien por: Im f.

CONVENIO: $f(\emptyset) = \emptyset$.

Se comprende que la aplicación $g: A \rightarrow f(A)$, tal que: $g(a) = f(a)$ para todo <u>a</u> de A , es prácticamente la misma f. Sin embargo, no se considera así,pues podría ocasionar confusiones. Es decir:

. DEFINICION 3: Dos aplicaciones f y g se consideran <u>iguales</u> solamente si tienen el mismo conjunto inicial, el mismo conjunto final, y $f(a) = g(a)$ para todo <u>a</u> del conjunto inicial.

DEFINICION 4: Dada una aplicación $f: A \rightarrow B$, se llama <u>restricción</u> de f a un subconjunto A_1 de A, a la aplicación $f_1: A_1 \rightarrow B$, dada por: $f_1(a) = f(a)$ para todo <u>a</u> de A_1. Se escribe: $f_1 = f|A_1$.

De acuerdo con la Definición 2, Im $f_1 = f(A_1)$.

DEFINICION 5: Sea B_1 una parte de B. Se llama imagen inversa (ó recíproca) de B_1 (por f), al conjunto de los elementos de A cuya imagen está contenida en B_1. Se indica: $f^{-1}(B_1)$.

Notemos que f^{-1} no es aplicación de B en A, sino de $\mathcal{P}(B)$ en $\mathcal{P}(A)$. Si B_1 se compone de un solo elemento b, se escribe $f^{-1}(b)$ en vez de: $f^{-1}(\{b\})$, que sería lo correcto; este convenio no autoriza a considerar: $b = \{b\}$, igualdad falsa, ya que b es un elemento y $\{b\}$ un conjunto, conceptos distintos.

CONVENIO: $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

EJERCICIOS:

1. Dar ejemplos diversos de aplicaciones.
2. Definir mediante símbolos, los conjuntos: $f(A_1)$, Im f, $f^{-1}(B_1)$, $f^{-1}(b)$.
3. Demostrar las siguientes propiedades:
   $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$; $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;
   $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$; $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
   $f^{-1}[f(A_1)] \supset A_1$; $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
4. Definir algunas aplicaciones en que puede suceder: $f^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_2)$ y sin embargo: $B_1 \neq B_2$. En particular: $f^{-1}(B_1) = \emptyset$ y $B_1 \neq \emptyset$.

DEFINICION 6: Una aplicación $f: A \to B$, se dice suprayectiva si Im f = B ; esto se indica tambien diciendo que f es aplicación de A sobre B. Entonces, cada elemento de B tiene al menos una antiimagen.

DEFINICION 7: Una f se dice inyectiva (ó 1-1) si dos elementos distintos, de A, cualesquiera, tienen imágenes distintas, es decir, cuando:

$$(\forall a, a' \in A) \quad a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a').$$

Lo cual equivale a: $f^{-1}(fa) = a$, para todo a de A.

Si A es un subconjunto de E, la aplicación $i: A \to E$, dada por: $i(a) = a$, es inyectiva, y se llama inclusión de A en E.

DEFINICION 8: Una f se dice biyectiva si es al mismo tiempo inyectiva y suprayectiva.

La inclusión de E en E es una aplicación biyectiva que se dice aplicación idéntica sobre E ; se indica por 1_E .

Una aplicación biyectiva de un conjunto E sobre sí, se dice permutación de E, nombre tomado del caso de E finito.

EJERCICIO:

5. Demostrar que f es biyectiva si dado un elemento b cualquiera de B, $\nexists$ a de A $\ni$ f(a) = b.

DEFINICION 9: Dada una $f: A \rightarrow B$ biyectiva, la aplicación $g: B \rightarrow A$, definida por: $g(b) = a \ni f(a) = b$, recibe el nombre de aplicación inversa (ó reciproca) de f, y se suele escribir f^{-1} en vez de g.

Notemos que f^{-1} es un símbolo que ya se ha usado para indicar imagen inversa; portanto, en el caso de f biyectiva tiene dos significados que no hay inconveniente en identificar; pero en el caso de f no biyectiva, solo admite el significado de la Definición 5.

EJERCICIOS:

6. Probar que la aplicación inversa de una f biyectiva, es tambien biyectiva.
7. Probar que f es inyectiva si y solo si cumple:
   $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$, para A_1, A_2 cualesquiera.
8. Probar que si f es biyectiva, se tiene: $f(A^c) = [f(A)]^c$.

DEFINICION 10: Se llama grafo (ó gráfica) de una aplicación $f: A \rightarrow B$, al conjunto G de todos los pares (a,fa) donde a es elemento de A. Notemos que G es una parte del conjunto $A \times B$.

Es evidente que G y B definen a f , puesto que G define al conjunto A y a la imagen fa de cada elemento a de A. Tan estrecha es pues la relación entre f y G, que algunos autores establecen la siguiente definición: "Una aplicación f es una terna formada por un conjunto A, uno B y una parte G de $A\times B$, tal que cada elemento de A aparece como primero en uno y solo un par de G ".

Si f es una función uniforme, por ejemplo de números reales, obtenemos una gráfica geométrica de f señalando en una cuadrícula cartesiana, un punto de coordenadas (a,fa) por cada elemento de G; de ahí tomó G el nombre de grafo.

2.COMPOSICION DE APLICACIONES.

Sean f y g dos aplicaciones tales que el conjunto final de f es el mismo conjunto inicial de g.

DEFINICION 11: Dadas dos aplicaciones $f: A \to B$, $g: B \to C$, queda definida una aplicación h de A en C, mediante: $h(a)= g(fa)$. Pues bien, esta h recibe el nombre de producto de f por g (ó compuesta de f por g). Se indica: $h = g.f$.

El diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

se dice conmutativo si: $h = g.f$.

Observemos que, debido a la notación empleada, en la expresión g.f las aplicaciones aparecen escritas en orden inverso al de actuación, que es: primero f y después g.

Es de destacar, que el producto de dos aplicaciones solo existe cuando cumplen la condición de: conjunto final de la 1ª = conjunto inicial de la 2ª. Es decir, que esta condición,no solo es suficiente para la existencia del producto (como establece la Definición 11), sino tambien necesaria.

Un caso importante en que esta condición se cúmple siempre, es entre aplicaciones de un conjunto E en sí mismo. El conjunto de estas aplicaciones se indica: $\mathbf{F}(E,E)$.

EJERCICIOS:

9. Definir aplicaciones de $\mathbb{R}$ en sí, y obtener las aplicaciones compuestas de cada dos.
10. Definir aplicaciones de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en sí, y obtener aplicaciones

compuestas de dos.

11. Sea h el producto g.f ; demostrar que si f y g son suprayectivas (inyectivas), h tambien lo es.

El concepto de producto de dos aplicaciones es naturalmente generalizable al caso de un número finito cualquiera.

DEFINICION 11 bis: Dadas n aplicaciones $f_1: A_1 \to A_2$,..., $f_n: A_n \to A_{n+1}$, tales que el conjunto final de cada una es el inicial de la siguiente, la aplicación $h: A_1 \to A_{n+1}$, dada por: $h(a) = f_n[f_{n-1}(..f_2(f_1 a)..)]$ se dice producto de f_1 por f_2 por ... por f_n, y se escribe: $h = f_n. \ldots .f_1$. Es decir: $h = f_n.[..f_3(f_2.f_1)..]$.

EJERCICIO:

12. Sean las aplicaciones $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$. Demostrar que: $h.(g.f) = (h.g).f$.

LECCION 3

1.RELACION BINARIA.

Sean A y B dos conjuntos.

DEFINICION 1: Una relación binaria R entre A y B (ó sobre A×B) es una ley que permite decir, dado cualquier par (a,b) de A×B , si el elemento a está relacionado con b mediante R, o no. En caso afirmativo se escribe: a R b , y en el contrario: $\overline{aRb}$.

Cuando A = B, la relación se dice definida en A, ó sobre A.

La frase:"a está relacionado con b mediante R", que es aplicable a cualquier tipo de relación binaria, se sustituye en los casos particulares más conocidos, por una frase propia del caso, usada tradicionalmente. Asimismo, el signo R se sustituye por uno específico.

EJEMPLOS:

1. $A = B = Q$; aRb $\Leftrightarrow$ $a < b$; frase que se emplea: a es menor que b.
2. A = B = conjunto de rectas del plano ordinario; aRb $\Leftrightarrow$ $a \| b$;

frase empleada: a es paralela a b.

3. $A = B = N$; $aRb \Leftrightarrow a|b$; frase usada: a es divisor de b.

DEFINICION 2: Se llama grafo de la relación R, al conjunto G de todos los pares (a,b) tales que a está relacionado con b mediante R.

Es evidente que dados A y B, G define a R y viceversa, por lo que es admisible la siguiente definición: "Una relación binaria entre dos conjuntos A y B, es una parte de $A{\times}B$", aunque ello equivale a identificar G y R , lo cual no es rigurosamente cierto.

Es de notar que el grafo de una aplicación f: A -->B (Definición 10, pg. 8) es un subconjunto especial de $A{\times}B$, y portanto, define una relación binaria especial, cuya particularidad reside en que cada elemento de A está relacionado con uno y solo uno de B.

EJERCICIO:

1. Dar ejemplos de relaciones binarias entre conjuntos finitos, y formar los grafos correspondientes. Representar gráficamente dichos grafos.

2.PROPIEDADES QUE PUEDE TENER UNA RELACION BINARIA SOBRE UN CONJUNTO.

Sea R una relación binaria sobre un conjunto E.

En los casos más interesantes, R suele poseer algunas de las propiedades siguientes:

DEFINICION 3: Se dice que R es reflexiva, ó que tiene la propiedad reflexiva, si se cumple: $(\forall a \in E)$ aRa .

DEFINICION 4: Se dice que R es simétrica, ó que tiene la propiedad simétrica, cuando: $aRb \Rightarrow bRa$.

DEFINICION 5: Se dice que R es transitiva, ó que tiene la propiedad transitiva, si: aRb y $bRc \Rightarrow aRc$.

DEFINICION 6: Se dice que R es antisimétrica, cuando: aRb y $bRa \Rightarrow a = b$.

EJERCICIOS:

2. Dar ejemplos de relaciones binarias sobre un E, y averiguar si tienen o no, alguna ó algunas de las propiedades anteriores.
3. Probar con un ejemplo, que una R puede ser simétrica y transitiva, sin ser reflexiva.

Notemos que dada una aplicación biyectiva f: A —>B , y una relación binaria R sobre A, queda definida otra S sobre B, mediante: $b_1Sb_2 \Leftrightarrow a_1Ra_2$. Es evidente que S tendrá las mismas propiedades que R.

3. RELACION DE EQUIVALENCIA.

Sea E un conjunto.

DEFINICION 7: Una relación de equivalencia en E , es una relación binaria R, que sea reflexiva, simétrica y transitiva. En tal caso, aRb se lee: a equivalente a b respecto de R (ó módulo R). Tambien se escribe a veces: $a \equiv b$ (R).

DEFINICION 8: Dada una relación R de equivalencia en E, y un elemento a, el conjunto $\{b | aRb\}$ es una parte de E que se dice clase de equivalencia de a (respecto de R). La indicaremos: [a].

EJERCICIOS:

4. Dar ejemplos de relaciones de equivalencia, y determinar las clases de equivalencia en cada ejemplo.
5. Demostrar que cada dos elementos de una clase de equivalencia, son equivalentes.

TEOREMA 1: La familia de clases de equivalencia de R, es una partición de E.

Demostración: Cada elemento de a de E pertenece al menos a la clase [a] ya que aRa . Para probar que solo pertenece a una, supongamos que $a \in [b]$, es decir, que aRb ; entonces, xRa $\Rightarrow$(por la transitiva) xRb , luego $[a] \subset [b]$; analogamente, xRb $\Rightarrow$ xRa , luego $[b] \subset [a]$. Se concluye: [a]=[b] .<>

COROLARIO 1.1: Cualquier elemento de una clase de equivalencia, la determina. Por ello, a un elemento de [a] se le dice tambien, representante de la clase [a].

Se llama sistema completo de representantes de una R de equivalencia, a un subconjunto de E que contiene un representante y solo uno de cada clase de equivalencia.

EJERCICIO:

6. Demostrar que, dada una partición $\mathcal{F}$ de E, la relación R definida mediante: aRb <=> a y b pertenecen al mismo miembro de $\mathcal{F}$, es de equivalencia.

DEFINICION 9: El conjunto de las clases de una R de equivalencia, recibe el nombre de conjunto cociente de E por R, y se escribe: E/R. Es decir, los elementos de E/R son [a], [b], etc.

DEFINICION 10: La aplicación p: E —>E/R , dada por: p(a) = [a], se llama aplicación canónica de E sobre E/R.

EJERCICIO:

7. Comprobar que en la p anterior se tiene: $p^{-1}([a]) = [a]$.

4. RELACION DE EQUIVALENCIA ASOCIADA A UNA APLICACION.

Sea dada una aplicación f: A —> B.

TEOREMA 2: La relación binaria R sobre A, definida mediante: aRa' <=> fa = fa' , es de equivalencia. Se dice relación asociada a f.

Demostración: Se propone como ejercicio.

Una clase de dicha R se compone de los elementos de A que tienen la misma imagen por f.

TEOREMA 3: Si R es la relación binaria asociada a f , la aplicación g: A/R —>f(A) dada por: g[a] = fa , es biyectiva.

Demostración: [a] $\neq$ [a'] <=> fa $\neq$ fa' <=> g[a] $\neq$ g[a']. <>

Llamemos i a la aplicación inclusión: f(A) —> B (v.pg. 8, Def. 7); entonces, teniendo en cuenta la Definición 10 y el Teorema 3 precedentes, se tiene para cualquier elemento a de A: p(a) = [a] , g[a] = fa , i(fa) = fa , y portanto:

$$f = i \cdot g \cdot p \qquad (1).$$

DEFINICION 11: La expresión de f como producto de aplicaciones dada por (1), se dice <u>descomposición canónica</u> de f.

En forma de diagrama, (1) puede representarse así:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ p\downarrow & & \uparrow i \\ A/R & \xrightarrow{g} & f(A) \end{array}$$

diciendo que el diagrama anterior es <u>conmutativo</u>.

EJERCICIOS:

8. Estudiar la descomposición canónica en los casos de f supra yectiva, ó inyectiva.
9. Determinar las clases de equivalencia asociada a diversas aplicaciones ya estudiadas en la Lección anterior.

<u>5.RELACION DE ORDEN</u>.

DEFINICION 12: Una <u>relación de orden</u> en un conjunto E, es una relación bánaria R sobre E, que sea reflexiva, transitiva y antisimétrica. El conjunto E se dice <u>ordenado</u> (por R). Se suele escribir: $a \leq b$, en vez de aRb.

La expresión: $a \leq b$ se lee: <u>a inferior a b</u> (ó <u>anteior</u> a <u>b</u>), Si $a \leq b$ y $a \neq b$, se suele escribir: $a < b$, y se lee: <u>a</u> estrictamente inferior a <u>b</u>.

Cuando $a \leq b$, ó $b \leq a$, los elementos <u>a</u> y <u>b</u> se dicen <u>comparables</u> por R. Por definición, cualquier <u>a</u> es comparable consigo mismo, es decir, (a,a) pertenece al grafo G de R. Pero en general, puede suceder que existan elementos a,b no comparables, esto es, que ni (a,b) ni (b,a) pertenezcan a G.

DEFINICION 13: Una relación de orden R, se dice de <u>orden total</u>, si dado cualquier par (a,b), a y b son comparables; E se dice <u>totalmente ordenado</u>. En caso contrario, R se dice de <u>orden parcial</u> , y E <u>parcialmente ordenado</u>.

Un conjunto totalmente ordenado se llama tambien <u>cadena</u>.

EJERCICIOS:

10. Entre las relaciones binarias sobre un E, ya mencionadas,

comprobar cuales son de orden, y si parcial ó total.

11. Dada una R de orden, comprobar que la relación binaria S, dada por: aSb <=> bRa , es tambien de orden y del mismo tipo que R. Se llama opuesta a R.

Diagrama.

Cuando el conjunto ordenado E es finito, el orden queda definido representando los elementos por puntos, uniendo con un segmento cada dos comparables, y situando estos de modo que si $a \leq b$, el vector $\overrightarrow{ab}$ sea ascendente. La figura que resulta se dice diagrama de la relación de orden.

EJERCICIO:

12. Dar ejemplos de conjuntos finitos ordenados y dibujar los diagramas correspondientes.

DEFINICION 14: En un conjunto totalmente ordenado, dados dos elementos a y b ($a \leq b$), se llama intervalo abierto de extremos a,b, al subconjunto:

$[x \in E | \ a < x < b]$, que se indica: $]a,b[$.

Se llama intervalo cerrado de extremos a,b, al subconjunto:

$[x \in E | \ a \leq x \leq b]$, que se escribe $[a,b]$.

Elementos notables en un conjunto ordenado.

DEFINICION 15: Dada una parte A de E, se dice mayorante de A , a cualquier elemento b de E tal que: $(\forall x \in A)\ x \leq b$.

Se dice minorante de A, a cualquier elemento a de E que cumpla: $(\forall x \in A)\ a \leq x$.

Si $a \leq b$, a se dice minorante de b, y b mayorante de a.

DEFINICION 16: Si existe un elemento de A que es mayorante (minorante) de A, se dice elemento máximo (mínimo) de A.

DEFINICION 17: Un conjunto ordenado E se dice bien ordenado si cualquier subconjunto de E distinto del vacio, tiene un elemento mínimo.

EJERCICIOS:

13. Probar que un conjunto ordenado A no puede tener dos máximos

(mínimos) distintos.

14. Demostrar que un conjunto bien ordenado es de orden total.
15. Probar que el conjunto N*, ordenado por la relación de divisibilidad, tiene un mínimo pero no un máximo.

DEFINICION 17: Sea A una parte de un E ordenado. Si el conjunto de mayorantes de A tiene un mínimo, este se dice extremo ~~cota~~ superior de A (en E), y se indica: $\sup_E A$. Si el conjunto de minorantes de A posee un máximo, este se llama extremo ~~cota~~ inferior de A y se escribe: $\inf_E A$.

EJERCICIOS:

16. Demostrar que en el conjunto N* ordenado por la relación de divisibilidad, cada dos elementos tienen una cota inferior y una superior.
17. Probar que en el conjunto $\mathbb{P}(F)$, la relación $ARB \Leftrightarrow A \subset B$ es de orden, y estudiarla.

DEFINICION 18: Un elemento a de un conjunto ordenado E, se dice maximal si: $x \in E$ y $a \leq x \Rightarrow a = x$. Un elemento b se dice minimal cuando: $x \in E$ y $x \leq b \Rightarrow x = b$.

EJERCICIO:

18: Averiguar cuales son los elementos minimales del conjunto ordenado N* anterior.

LECCION 4

1.OPERACION BINARIA INTERNA.

Sea E un conjunto.

DEFINICION 1: Una operación binaria interna en E (ó ley de composición interna sobre E) es una aplicación $f: E\times E \longrightarrow E$.

La imagen $f(a,b)$ del par (a,b) se acostumbra a escribir mediante un signo (por ejemplo $*$), poniendo: $a * b$, en vez de $f(a,b)$. Y el elemento $a*b$ se dice resultado (ó compuesto) de a por b en la operación $*$.

En lo que sigue, para representar operaciones arbitrarias, usaremos con preferencia los signos . (por) y * (estrella). Tambien se escribe: ab , en vez de $a*b$, cuando no hay riesgo de confusión.

EJEMPLOS:

1. $E = Z$; $a*b = a + b$.
2. $E = N$; $a*b = ab$.
3. $E = N^*$; $a*b = a^b$.
4. E = conjunto $\mathcal{F}(A,A)$ de las aplicaciones de un conjunto A en sí ; $f*g = g.f$.
5. E = conjunto $\mathcal{P}(A)$ de las partes de A ; $A_1*A_2 = A_1 \cup A_2$; $A_1.A_2 = A_1 \cap A_2$.

DEFINICION 2: Sea E un conjunto con una operación binaria interna $*$, y A,B dos subconjuntos de E. Se llama compuesto de A y B por $*$, al subconjunto $[a*b \not\vdash a \in A$ y $b \in B]$, que se escribe: $A*B$.

Queda así definida una operación binaria en $\mathcal{P}(E)$, y por ello distinta de la anterior, aunque se indique con el mismo signo.

DEFINICION 3: Una parte A de E se dice estable (ó cerrada) para la operación $*$, si $A*A \subset A$, es decir, si: $a \in A$ y $b \in A \Rightarrow a*b \in A$. Entonces, A aparece dotado de una operación interna que se dice restricción de $*$ a A, y que no hay inconveniente en indicar con el mismo signo *.

EJERCICIO:

1. Determinar partes estables en los Ejemplos 1,2,4 y 5 precedentes.

DEFINICION 4: Sea A un conjunto dotado de una operación binaria interna (*), y B otro dotado de una (.). Entonces, queda definida en A×B una operación binaria interna (α) escribiendo:

$$(a,b)\alpha(a',b') = (a*a', b.b')$$

que se dice <u>operación producto</u> de (*) por (.) .

En el caso: A = B y (*)=(.) , que es el más interesante, se emplea el mismo signo * para la operación producto, que ahora se suele designar con el nombre de <u>extensión de * al conjunto A×A</u>.

Más adelante veremos ejemplos de estas extensiones.

<u>2.OPERACION ESTABLE RESPECTO DE UNA RELACION DE EQUIVALENCIA.</u>

Sea E un conjunto dotado de una relación R de equivalencia y de una operación binaria interna *.

DEFINICION 5: La operación * se dice <u>estable respecto de R</u> si se cumple: aRa' y bRb' => $(a*b)R(a'*b')$.

También se dice entonces, que <u>R es estable para *</u>.

EJERCICIOS:

2. Probar que en el Ejemplo 1 precedente, la operación (+) es estable respecto de la relación R dada por: aRa' <=> $a-a'=\dot{3}$.
3. Probar en el Ejemplo 2, que la operación (.) es estable respecto de la relación R dada por: $|a - b| = \dot{4}$.

TEOREMA 1: Si una operación * es estable respecto de la relación de equivalencia R, la ley: ([a],[b]) --> [a*b] , es una aplicación: E/R × E/R --> E/R , y portanto, es una operación interna en el conjunto cociente E/R .

Demostración: Basta probar que la clase [a*b] es única, cualesquiera que sean los representantes de [a] y de [b]. Pero esto es cierto, ya que: $a' \in [a]$ y $b' \in [b]$ => $a'*b' \in [a*b]$

por ser * estable respecto de R, luego: $[a'*b'] = [a*b]$. <>

DEFINICION 6: La operación cuya existencia establece el Teorema anterior, se llama operación inducida por * en E/R.

Y siguiendo convenios precedentes, se indica con el mismo signo *, ya que ello no da lugar a confusión.

3. PROPIEDADES QUE PUEDE TENER UNA OPERACION BINARIA INTERNA.

En los casos más interesantes, una operación binaria interna (.) sobre un E, suele poseer una ó varias de las propiedades siguientes.

DEFINICION 7: La operación (.) se dice asociativa, ó que tiene la propiedad asociativa, si cumple:

$$(\forall\, a,b,c \in E) \quad (a.b).c = a.(b.c) \ .$$

TEOREMA 2: Si la operación (.) es asociativa, dada una n-tupla $(a_1,\dots, a_n)$ de elementos de E, las expresiones $(a_1. ..(..)..).(..(..)..\ .a_n)$ dan el mismo resultado, cualesquiera que sean los paréntesis que aparezcan en ellas. Dicho resultado se escribe: $a_1. \dots .a_n$.

Demostración: El teorema es cierto para tres elementos, por hipótesis; supongamos que lo es para $\underline{r}$, $r \leq n-1$. Entonces, cada uno de los dos paréntesis "mayores" de la expresión considerada, tendrá un número de elementos menor que $\underline{n}$, luego por la hipótesis de inducción su valor está determinado. Portanto, las expresiones precitadas se reducen a estas tres:

1ª) $(a_1. \dots .a_{n-1}).a_n$

2ª) $a_1.(a_2. \dots .a_n)$

3ª) $(a_1. \dots .a_r).(a_{r+1}. \dots .a_n)$, donde: $1<r<n-1$.

Pero se tiene: 2ª= 1ª , pues: $a_1.(a_2.\dots.a_n) =$
$= a_1.[(a_2. \dots .a_{n-1}).a_n] = [a_1.(a_2. \dots .a_{n-1})].a_n =$ 1ª.

Tambien es: 3ª= 1ª, ya que: $(a_1. \dots .a_r).(a_{r+1}. \dots .a_n) =$
$= (a_1. \dots .a_r).[(a_{r+1}. \dots .a_{n-1}).a_n] =$
$= [(a_1. \dots .a_r).(a_{r+1}. \dots .a_{n-1})].a_n =$ 1ª .<>

DEFINICION 8: Se dice que la operación (.) es <u>conmutativa</u> ó que tiene la propiedad conmutativa, si cumple:

$$(\forall\, a,b \in E) \quad a.b = b.a \quad .$$

Para una operación cónmutativa, es frecuente usar como signo, el + de la suma ordinaria, y entonces la notación se dice <u>aditiva</u>. Cuando se usa el signo (.) ú otros análogos, la notación se dice <u>múltiplicativa</u>.

TEOREMA 3: Si una operación (.) es asociativa y conmutativa, para cada n-tupla $(a_1, \ldots, a_n)$ se tiene:

$$a_{\alpha 1}. \ldots .a_{\alpha n} = a_1. \ldots .a_n$$

siendo α una permutación cualquiera de $(1,\ldots,n)$; es decir, el orden de los elementos no altera el resultado.

Demostración: Consideremos primero el caso más sencillo, que α permute solamente dos elementos sucesivos $a_r a_{r+1}$. Se tiene: $a_1. \ldots .a_n = (\quad).(a_r.a_{r+1}).(\quad) = (\quad).(a_{r+1}.a_r).(\quad) =$ $= a_1. \ldots .a_{r+1}.a_r. \ldots .a_n$, luego en este caso el teorema se cumple.

En el caso general, mediante permutaciones de elementos consecutivos, podemos colocar los a_i en el orden $(a_{\alpha 1},\ldots,a_{\alpha n})$, y como cada una de tales permutaciones no modifica el resultado, queda demostrado el teorema. <>

Aunque la operación (.) no sea conmutativa, puede suceder a.b = b.a , para dos elementos <u>a</u>,<u>b</u> particulares.

DEFINICION 9: Dos elementos <u>a</u> y <u>b</u> de E, se dicen <u>permutables</u> para la operación (.) si: a.b = b.a . Un elemento <u>c</u> se dice <u>central</u> para (.) si es permutable con todo elemento de E. El conjunto de los elementos centrales de E para (.) se llama <u>centro</u> de E para la operación (.).

EJERCICIOS:

4. Determinar las propiedades de las operaciones binarias de los Ejemplos 1-5 del párrafo 1. Idem de otros ejemplos.
5. Definir en un conjunto finito, una operación binaria con propiedades prefijadas.

6. Probar que el centro de $(E,.)$ es un subconjunto estable para $(.)$, siempre que la operación sea asociativa.

DEFINICION 10: Dado un conjunto E con dos operaciones internas $(*)$ y $(.)$, se dice que $(.)$ es distributiva a izquierda respecto de $*$, si se cumple:

$$(\forall a,b,c \in E) \quad a.(b*c) = (a.b)*(a.c) \quad ;$$

distributiva a derecha si se tiene:

$$(\forall a,b,c \in E) \quad (a*b).c = (a.c)*(b.c) \quad ;$$

y distributiva si lo es a ambos lados.

TEOREMA 4: Si la operación $(.)$ es estable respecto de una relación R de equivalencia en E, la operación inducida por ella en E/R posee sus mismas propiedades. Si otra operación $*$ es también estable respecto de R, y ligada a $(.)$ por una propiedad distributiva, las operaciones inducidas en E/R están ligadas por la misma propiedad.

Demostración: Se propone como Ejercicio.

DEFINICION 11: Un elemento e de E , se dice neutro para la operación $(.)$ si cumple:

$$(\forall a \in E) \quad a.e = e.a = a.$$

TEOREMA 5: Si una operación $(.)$ posee elemento neutro, este es único.

Demostración: Sean e y e' elementos neutros de E para $(.)$. Se tiene: $e.e' = e'$ por ser e neutro; $e.e' = e$ por serlo e' ; por lo tanto: $e = e'$.<>

DEFINICION 12: Dada una operación $(.)$ con elemento neutro e , dos elementos a y a' se dicen simétricos en la operación, si cumplen: $a.a' = a'.a = e$.

En tal caso, a (a') se dice simetrizable , y que a' (a) es un elemento simétrico de a (a').

TEOREMA 6: Si la operación es asociativa, y en ella el elemento a posee un simétrico, este es único.

Demostración: Sean a' y a" dos simétricos de a. Se tiene entonces: $a'.a.a" = (a'.a).a" = e.a" = a"$, y tambien: $a'.a.a" = a'.(a.a") = a'.e = a'$; luego: $a' = a"$.<>

Debido a la unicidad, se designa en general dicho simétrico escribiendo: $\underline{a}^{-1}$. Con notación aditiva, se escribe: $\underline{-a}$.

Por definición de operación binaria, se cumple siempre: $a = b \Rightarrow a.c = b.c$. Pero puede suceder que sea: $a.c = b.c$ y $a \neq b$.

DEFINICION 13: Un elemento $\underline{c}$ se dice <u>regular a la derecha</u> para la operación (.), si cumple:

$$a.c = b.c \Rightarrow a = b.$$

Analogamente, se dice <u>regular a la izquierda</u> si:

$$c.a = c.b \Rightarrow a = b\ ,$$

y <u>regular</u> si lo es a ambos lados.

Tambien se usa el adjetivo <u>simplificable</u> en vez de regular.

EJERCICIOS:

7. En cada Ejemplo del párrafo 1, determinar, caso de que existan, el elemento neutro, el simétrico de uno dado, y elementos regulares. Idem en otros ejemplos.
8. Demostrar que en una operación asociativa, si existe el simétrico de $a.b$, es igual a: $b^{-1}.a^{-1}$.
9. Dada una operación (.) y un elemento $\underline{c}$, la aplicación $f_c: E \to E$, dada por: $f_c(x) = c.x$, se llama <u>traslación a izquierda</u> asociada a $\underline{c}$. Comprobar que f es inyectiva si y solo si $\underline{c}$ es regular a la izquierda.
10. En el Ejemplo 4 del párrafo 1, demostrar que f es simetrizable si y solo si es biyectiva.
11. En dicho Ejemplo, demostrar que los elementos regulares a izquierda son las aplicaciones inyectivas, y los regulares a derecha son las suprayectivas.

<u>4.POTENCIAS EN UNA OPERACION INTERNA ASOCIATIVA.</u>

Sea $\underline{a}$ un elemento de un conjunto dotado de una operación binaria interna (.) asociativa.

Entonces se escribe: $a. \overset{p}{\ldots} .a = a^p$, $p \in N^*$.

Se sigue:
$$(\forall\, p,q \in N^*)\quad a^p.a^q = a^{p+q}\ ,\ (a^p)^q = a^{pq}\ .$$

Convenios: Si (.) posee elemento neutro e , se escribe: $a^0 = e$.

Si a posee simétrico a^{-1}, se pone: $(a^{-1})^p = a^{-p}$.

Con los convenios precedentes, es fácil comprobar que las fórmulas precedentes son válidas para cualesquiera $p,q \in Z$.

Finalmente, si la operación (.) es tambien conmutativa, se sigue: $(a.b)^p = a^p.b^p$, $p \in Z$.

Notación aditiva.

Con esta notación, las fórmulas precedentes se escriben:
$a +\overset{p}{\ldots}+ a = pa$; $0a = e$; $p(-a) = - pa$;
$pa + qa = (p + q)a$; $p(qa) = (pq)a$; $p(a + b) = pa + pb$.

5.OPERACION BINARIA EXTERNA.

Sean K y $\underset{\cdot}{E}$ dos conjuntos.

DEFINICION 14: Se llama operación binaria externa (ó ley de composición externa) sobre E con dominio K de operadores , a una aplicación $g\colon K \times E \dashrightarrow E$. La imagen $g(t,a)$ del par (t,a) se acostumbra a escribir: $t.a$, ó simplemente ta .

EJEMPLOS:

1. E = conjunto de vectores fijos de un plano ordinario; $K = \mathbb{R}$; $t.a$ = producto de un vector por un número real.
2. E = conjunto con una operación interna asociativa; $K = N^*$; $n.a = a^n$ (v. párrafo anterior).
3. E cualquiera; $K = \mathcal{F}(E,E)$; $f.a = f(a)$.

Si A es un subconjunto de E, y t un elemento de K, se indica con tA el conjunto: $\{x \in E \nrightarrow x = ta \ , \ a \in A\}$.

DEFINICION 15: El subconjunto A de E se dice estable (ó cerrado) para la operación externa (.) si: $(\forall\, t \in K)\ tA \subset A$. Entonces, aparece A dotado de una operación externa que se dice restricción de (.) a A , la cual se indica con el mismo signo (.).

DEFINICION 16: Si el dominio K de operadores posee una operación interna * asociativa, se dice que la operación externa

<u>es asociativa</u> para $*$, si se cumple:

$$(\forall\, t,s \in K)\ (\forall\, a \in E) \quad (t*s)a = t(sa).$$

Si E está dotado de una operación interna (+), se dice que (.) es <u>distributiva respecto de (+)</u> , cuando:

$$(\forall\, t \in K)\ (\forall\, a,b \in E) \quad t(a + b) = ta + tb.$$

Finalmente, se dirá que (.) es distributiva respecto de $(*)$ y $(+)$, si se cumple:

$$(\forall\, t,s \in K)\ (\forall\, a \in E) \quad (t*s)a = ta + sa.$$

EJERCICIO:

12. Considerando en los Ejemplos 1,2,3 precedentes, las operaciones internas de K y E, determinar las propiedades que posee la operación (.) respecto de ellas.

DEFINICION 17: Una operación externa (.) sobre E se dice <u>estable para una relación de equivalencia R</u> en E, si se cumple:

$$(\forall\, t \in K) \quad aRa' \ \Rightarrow\ ta\ R\ ta' \ .$$

Entonces, la ley externa (.): $K \times E/R \longrightarrow E/R$, dada por: $t.[a] = [ta]$, está bien definida, y se dice <u>inducida</u> por la operación externa sobre E.

<u>LECCION 5</u>

1.<u>ESTRUCTURA ALGEBRAICA. HOMOMORFISMO</u>.

DEFINICION 1: Se da el nombre general de <u>estructura algebraica</u> a la reunión de un conjunto E y de un número finito de operaciones, internas ó externas, definidas en él.

En adelante, cuando escribamos estructura se supondrá algebraica.

Tambien se dice: "estructura es un conjunto E dotado de un número finito de operaciones". Pero resaltemos que no es E la estructura, sino el sistema formado por E y las operaciones. El conjunto E se dice <u>soporte</u> de la estructura. Es claro que un mismo E puede ser soporte de estructuras diversas.

Para representar abreviadamente una estructura, se escribe entre paréntesis la letra que indica el conjunto soporte y los signos de las operaciones. Por ejmplo: $(E, +, *)$ representa una estructura que tiene las operaciones + y *.

Diremos que dos estructuras son <u>análogas</u> si tienen el mismo número de operaciones internas y el mismo número de externas.

DEFINICION 2: Sean E y E' los conjuntos soporte de dos estructuras análogas. Entonces, se llama <u>homomorfismo</u> a una aplicación $f: E \longrightarrow E'$, que cumple:

1°) para cada operación interna * en E, existe una y solo una $\bar{*}$ en E' tal que:

$$(\forall\, a,b \in E) \quad f(a*b) = fa\,\bar{*}\,fb\ .$$

2°) para cada operación externa (.) sobre E, existe una y solo una $(\bar{\cdot})$ sobre E' con el mismo dominio K de operadores que (.), y tal que:

$$(\forall\, t \in K)\ (\forall\, a \in E) \quad f(t.a) = t \mathbin{\bar{\cdot}} fa\ .$$

EJEMPLOS:

1. $f: (N, +) \longrightarrow (N, .)$, dada por: $f(n) = 2^n$.
2. $f: (\mathbb{R}^+, .) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$, donde $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \nmid x > 0\}$, y $f(x) = \log x$.
3. $f: (Z, +) \longrightarrow (P, .)$, donde $P = \{+1, -1\}$, y $f(n) = (-1)^n$.

EJERCICIOS:

1. Dar ejemplos geométricos de homomorfismos.
2. Sea $(E, *)$ una estructura tal que * es estable respecto de una relación de equivalencia R. Comprobar que entonces, la aplicación canónica: $E \longrightarrow E/R$, es un homomorfismo de $(E, *)$ en $(E/R, *)$.

Un homomorfismo biyectivo se dice <u>isomorfismo</u> , y las dos estructuras implicadas se dicen <u>isomorfas</u> ; es inmediato que la aplicación inversa es tambien isomorfismo.

<u>Notemos</u> que una estructura es análoga de sí misma, y que puede haber homomorfismo $f: E \longrightarrow E$ tal que: $\bar{*} = *$, $(\bar{\cdot}) = (.)$; en este caso, f se llama <u>endomorfismo</u> de E. Si además es biyectivo, se dice <u>automorfismo</u>.

2.PROPIEDADES DE UN HOMOMORFISMO.

Comencemos considerando el caso más simple de homomorfismo, el de dos estructuras con una sola operación interna: $(E, *)$ y $(E', .)$.

TEOREMA 1: Si f es un homomorfismo: $(E, *) \longrightarrow (E', .)$, se tiene: 1°) $f(E)$ es una parte estable de E' para (.) ;
2°) si * es asociativa (conmutativa), tambien lo es la restricción de (.) a $f(E)$.
3°) si existe elemento neutro $\underline{e}$ de *, el $f(e)$ es neutro para la restricción de (.) a $f(E)$.
4°) si $\underline{a} \in E$ posee un simétrico $\underline{b}$ respecto de *, el $\underline{fb}$ es simétrico de $\underline{fa}$ respecto de (.).

Demostración:

1°) Sean a' y b' elementos de $f(E)$; se sigue que: $\exists\, a \nrightarrow fa = a'$, y $\exists\, b \nrightarrow fb = b'$, luego: $a'.b' = fa.fb = f(a*b)$. Pero $a*b \in E$, y portanto: $a'.b' \in f(E)$.

2°) Por ser f homomorfismo, se tiene: $f[(a*b)*c] = f(a*b).fc = (fa.fb).fc$; igualmente: $f[a*(b*c)] = fa.(fb.fc)$; y como a,b,c son elementos de E, tambien son fa,fb,fc elementos arbitrarios de $f(E)$, luego si * es asociativa en E, (.) lo es en $f(E)$.

Si * es conmutativa, la demostración se propone como Ejercicio.

3°) Sea $f(e) = e'$; se tiene: $(\forall a \in E)\ a*e = e*a = a$, luego: $f(a*e) = f(e*a) = fa$, es decir: $a'.e' = e'.a' = a'$, para todo $a' = fa$, o sea para todo elemento de $f(E)$.

4°) Se propone como Ejercicio. <>

Notemos que por ser $f(E)$ estable para (.), $(f(E), .)$ es una estructura.

TEOREMA 2: Sea R la relación de equivalencia asociada al homomorfismo f anterior. Entonces se tiene:

1°) la operación * es estable respecto de R.

2°) la aplicación $\bar{f}: E/R \longrightarrow E'$, dada por: $\bar{f}[a] = fa$, es un homomorfismo inyectivo (<u>monomorfismo</u>) de $(E/R, *)$ en $(E',.)$.

3°) la aplicación $\bar{f}: E/R \longrightarrow f(E)$, dada por: $\bar{f}[a] = fa$, es un isomorfismo.

Demostración:

1°) Sea aRx, bRy; esto equivale a: $fa = fx$, $fb = fy$, luego: $f(a*b) = fa.fb = fx.fy = f(x*y)$, o sea: $(a*b)R(x*y)$. Portanto, * es estable para R.

2°) Indicamos con $(E/R, *)$ la estructura formada por E/R y la operación inducida por * en E/R (v. pg.19, Def.6). Resulta: $\bar{f}([a]*[b]) = \bar{f}[a*b] = f(a*b) = fa.fb$, luego $\bar{f}$ es homomorfismo. Que $\bar{f}$ es inyectiva se sigue de la descomposición canónica de f (v. pg.14, Def.11).

3°) es consecuencia inmediata de 2°). <>

La estructura $(E/R, *)$ anterior se dice <u>estructura cociente</u> de $(E, *)$ pór R.

El resultado 3° demuestra que: "la estructura cociente asociada al homomorfismo f, es isomorfa a la <u>estructura imagen</u> $(f(E), .)$". Lo entrecomillado se conoce con el nombre de <u>Teorema de isomorfía</u>, relativo a ese tipo de estructuras.

EJERCICIOS:

3. Sea f un isomorfismo: $(E, *) \longrightarrow (E', .)$. Demostrar que si <u>a</u> es regular para *, <u>fa</u> lo es para (.).
4. Hallar los endomorfismos y los automorfismos de $(Z, +)$ y de $(Z, +, .)$.
5. Sea E un comjunto dotado de una operación interna *, y sea (.) el producto de aplicaciones en $\mathbf{F}(E,E)$. Comprobar que * es asociativa <=> la aplicación $f: (E, *) \longrightarrow (\mathbf{F}, .)$, dada por: $(\forall b \in E)\ \ (fa)b = a*b$, es un homomorfismo.

LECCION 6

1.GRUPO. PRIMERAS PROPIEDADES.

DEFINICION 1: Un grupo es un conjunto G dotado de una operación interna asociativa, con elemento neutro, y tal que cada elemento posee simétrico.

La operación se indicará (.) en el caso general, y (+) si es conmutativa.

En el caso general, el grupo se dice multiplicativo ó grupo a secas; la operación se dice producto; el elemento neutro se dice unidad y se escribe e ó 1 ; el simétrico de a se dice inverso de a y se indica a^{-1}.

En el caso conmutativo, el grupo se dice conmutativo, aditivo ó abeliano ; la operación suma ; el elemento neutro, cero ó nulo y se escribe 0 ; el simétrico de a se dice opuesto de a y se indica $-a$.

Si G tiene n elementos (n natural), el grupo se dice finito de orden n.

EJEMPLOS DE GRUPOS:

1. Z, Q, R, C, con la operación (+).
2. Q^*, R^*, C^*, Q^{*+}, R^{*+}. con la operación (.).
3. El conjunto de las homotecias del plano, de centro fijo y razón no nula, con la operación "producto de homotecias".
4. El conjunto de giros del plano, de centro fijo y ángulo múltiplo de 30° (grupo finito de orden 12), con la operación "producto de giros".
5. El conjunto de las permutaciones de un conjunto E, con la operación "producto de aplicaciones".

EJERCICIO:

1. Probar que los movimientos que hacen coincidir un rombo consigo mismo, forman grupo con la operación "producto de movimientos". Escribir su tabla de multiplicar.

TEOREMA 1: Todo elemento de G es regular.

Demostración: Si $\underline{a}$ es de G, sea a^{-1} su simétrico. Entonces: $ab = ac \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) \Rightarrow$ (por ser la operación asociativa) $eb = ec \Rightarrow b = c$. <>

TEOREMA $\overline{2}$: En G , la ecuación $ax = b$ ($ya = b$) tiene solución única: $x = a^{-1}b$ ($y = ba^{-1}$).

Demostración: Se propone como Ejercicio.

COROLARIO $\overline{2}$.1: En G , cualquier traslación a izquierda (derecha) es biyectiva.

Demostración: Se propone como Ejercicio.

2. SUBGRUPOS.

Sea G un grupo.

DEFINICION 2: Un <u>subgrupo</u> de G es una parte S de G, estable para la operación (.), y tal que (S, .) es grupo.

EJEMPLOS:

6. Cada uno de los grupos aditivos Z, Q, R, C es subgrupo de todos los siguientes.
7. En (Z, +) lo es el conjunto Zp , p fijo.
8. En cualquier grupo G, lo es el conjunto $[a^n \nrightarrow n \in Z]$ donde $\underline{a}$ es elemento fijo de G ; este subgrupo se dice <u>monógeno</u> de <u>generador</u> $\underline{a}$.

no vacía

TEOREMA 1: Una parte S de G es subgrupo, si y solo si se cumple: 1°) $S.S \subset S$; 2°) $a \in S \Rightarrow a^{-1} \in S$.

Demostración: Se propone como Ejercicio.

TEOREMA 2: Una parte S de G es subgrupo, si y solo si se verifica: $(\forall a,b \in S)\ ab^{-1} \in S$.

Demostración: =>) Si S es subgrupo, se tiene por definición de subgrupo: $(\forall a,b \in S)\ ab^{-1} \in S$.

<=) Si $a \in S$, se tiene: $aa^{-1} = e \in S$, luego S posee elemento neutro; se sigue que: $ea^{-1} = a^{-1} \in S$, luego cada $a \in S$ tiene inverso en S. Portanto (S, .) es grupo. <>

↳ Ahora, si a y b son de S, a y b^{-1} son de S, luego <u>ab</u> es de S

EJERCICIOS:

2. Determinar los subgrupos del Ejemplo 4.

3. Demostrar que la intersección de una familia de subgrupos de G es un subgrupo de G.
4. Demostrar que el centro (v. pg.20, Def.9) de un grupo es subgrupo.

DEFINICION 3: Sea <u>a</u> un elemento fijo cualquiera de G, y S un subgrupo. Se <u>llama</u> <u>clase a izquierda</u> (ó <u>cogrupo</u> a izquierda) módulo S , al conjunto: $aS = \{ab \mid b \in S \text{ , } \underline{a} \text{ fijo}\}$. Analogamente se definen las clases a derecha.

TEOREMA 3: La relación R definida en G mediante: $aRb \iff ab^{-1} \in S$, es de equivalencia, y las clases respectivas son las clases a derecha módulo S.

Demostración:

1°) Como $e \in S \Rightarrow (\forall a \in G)\ aa^{-1} \in S$, lo cual indica que R es reflexiva.

2°) $ab^{-1} \in S \Rightarrow$(por ser S subgrupo) $(ab^{-1})^{-1} = ba^{-1} \in S$, es decir: $aRb \Rightarrow bRa$, luego R es simétrica.

3°) $ab^{-1} \in S$ y $bc^{-1} \in S \Rightarrow$(por ser S subgrupo) $(ab^{-1})(bc^{-1}) = ac^{-1} \in S$, es decir, aRb y $bRc \Rightarrow aRc$, luego R es transitiva.

4°) Notemos que: $ab^{-1} \in S \iff a \in Sb$, luego $[b] = Sb$. <>

TEOREMA 3 bis: La relación $\bar{R}$ definida en G mediante: $a\bar{R}b \iff a^{-1}b \in S$, es de equivalencia, y las clases respectivas son las clases a izquierda módulo S.

COROLARIO 3.1: Las clases a izquierda (derecha) de G módulo S, constituyen una partición de G.

<u>Notemos</u> que si S es finito, el número de elementos de aS es igual al orden de S.

EJERCICIO:

5. Demostrar que si G es finito, el orden de cualquier subgrupo S es divisor del orden de G. El cociente se llama <u>indice</u> de S,respecto de G.

3.PARTICION ESTABLE DE UN GRUPO. SUBGRUPO INVARIANTE.

Si una relación R de equivalencia en G, es estable para la operación del grupo, diremos que la partición correspondiente a R es estable.

TEOREMA 4: Si las dos relaciones R y $\overline{R}$ de los Teoremas 3 y 3 bis coinciden, la relación $R = \overline{R}$ es estable para la operación del grupo.

Demostración: Notemos que $R = \overline{R}$ equivale a que cada clase a izquierda lo es tambien a derecha, es decir, a que: $aS = Sb$. Pero entonces, $a \in Sb$, luego: $Sb = Sa$, y se concluye:
$(\forall\, a \in G)\ aS = Sa$. Se sigue:
$(\forall\, a,b \in G)\quad (aS)(bS) = a(Sb)S = a(bS)S = (ab)(SS) = (ab)S$.

Por lo tanto se tiene: $a'Ra$ y $b'Rb \Leftrightarrow a' \in aS$ y $b' \in bS \Rightarrow a'b' \in (aS)(bS) = (ab)S \Leftrightarrow (a'b')R(ab)$.<>

DEFINICION 4: Un subgrupo S de G que cumple:
$(\forall\, a \in G)\ aS = Sa$, se dice invariante, distinguido ó normal.

Consecuencia: Si G es abeliano, cualquier subgrupo de G es invariante.

TEOREMA 5: Si S es subgrupo invariante de G, y R la relación de equivalencia estable que define, la estructura $(G/R,.)$ inducida, es un grupo.

Demostración: 1°) la operación (.) es asociativa en G/R , ya que es inducida por una asociativa; 2°) como $[a].[b] = [ab]$, se sigue que la clase $[e]$ es elemento neutro en G/R ; 3°) asimismo, que $[a]$ tiene inverso $[a^{-1}]$. <>

DEFINICION 5: El grupo anterior recibe el nombre de grupo cociente (ó grupo factor); se indica G/S , y se lee: G sobre S.

TEOREMA 6:(recíproco del 4): Una partición estable de G, es el conjunto de las clases módulo S, de un subgrupo S invariante.

Demostración: Llamemos R a la relación de equivalencia definida por la partición, y S a la clase $[e]$. Se tiene:

1°) $s,t \in S \iff sRe$, $tRe \Rightarrow (st)R(ee) \iff st \in S$;

2°) $s \in S \iff sRe \iff (ss^{-1})R(es^{-1}) \iff eRs^{-1} \iff s^{-1} \in S$;

luego 1° y 2° prueban que S es subgrupo.

3°) Siendo a un elemento fijo cualquiera de G, se tiene: $aRb \iff (aa^{-1})R(ba^{-1}) \iff eR(ba^{-1}) \iff ba^{-1} \in S \iff b \in Sa$, es decir: $[a] = Sa$. Analogamente, $aRb \iff (a^{-1}a)R(a^{-1}b) \iff eR(a^{-1}b) \Rightarrow [a] = aS$. <>

EJEMPLO :

9. En el grupo $(Z,+)$, el grupo cociente Z/Zp , tiene por elementos las clases de restos módulo p : $[a] = a + Zp$. Se dice tambien a Z/Zp grupo de los enteros módulo p.

EJERCICIOS:

6. Determinar el orden del grupo Z/Zp y formar la tabla de la suma para $p = 4$.

7. Demostrar que el centro de un grupo es subgrupo invariante.

4.HOMOMORFISMO DE GRUPOS.

Dos grupos son dos estructuras análogas; aplicando a este caso la definición general de homomorfismo (v. pg.25), se tiene

DEFINICION 6: Un homomorfismo de un grupo $(G,.)$ en uno $(G', *)$ es una aplicación $f: G \longrightarrow G'$, que cumple:

$$(\forall a,b \in G) \quad f(a.b) = fa*fb \ .$$

Aplicando a este caso el teorema 1 de la Lección 5 (v. pg. 26), resulta:

TEOREMA 7: Si f es un homomorfismo de grupos: $G \longrightarrow G'$, la imagen $f(G)$ es un subgrupo de G', el elemento $f(e)$ es el neutro de G', y el $f(a^{-1})$ es el inverso de $f(a)$.

Aplicando ahora el teorema 2 de la Lección 5 (v. pg.26) y el Teorema 6 precedente, se tiene:

TEOREMA 8: La relación de equivalencia R asociada a f , es estable para (•), y portanto resulta: 1°) la clase [e], es decir, el conjunto $f^{-1}(e') = N$, es un subgrupo invariante de G, y tal que: $[a] = f^{-1}(a) = aN$; 2°) la aplicación $\bar{f}$: $G/N \longrightarrow f(G)$ dada por: $\bar{f}(aN) = fa$, es un isomorfismo.

DEFINICION 7: El conjunto $f^{-1}(e')$ recibe el nombre de núcleo del homomorfismo f, y se escribe tambien: ker f.

COROLARIO 8.1 (Primer Teorema de isomorfía de grupos): Si $f: G \longrightarrow G'$ es un homomorfismo de grupos, el grupo cociente $G/\mathrm{Ker}\ f$ es isomorfo al grupo imagen $\mathrm{Im}\ f$.

TEOREMA 9: Si S es un subgrupo invariante de G, la aplicación $p: G \longrightarrow G/S$, dada por: $p(a) = aS$, es un homomorfismo suprayectivo, cuyo núcleo es S (homomorfismo canónico de G sobre G/S).

Demostración: Se propone como Ejercicio.

COROLARIO 9.1: La descomposición canónica (v. pg.14, Def.11) del homomorfismo f, es: $f = i.\bar{f}.p$, donde p es el homorfismo canónico: $G \longrightarrow G/N$, $\bar{f}$ el isomorfismo anterior, e i la inclusión: $f(G) \longrightarrow G'$.

EJERCICCIOS:

8.Dar ejemplos de homomorfismos entre los grupos ya conocidos.

9. Probar que un homomorfismo es inyectivo si y solo si su núcleo solo contiene al elemento neutro e.

10. Demostrar que si $f: G \longrightarrow G'$, es un homomorfismo de grupos, se cumple:

   a) si S es subgrupo ~~invariante~~ de G, f(S) lo es de G'.

   b) si S' es subgrupo invariante de G', $f^{-1}(S')$ lo es de G.

Recordemos que un automorfismo de G es un isomorfismo de G sobre sí.

TEOREMA 10: Sea a un elemento fijo de G; entonces, la aplicación $g_a: G \longrightarrow G$, dada por: $g_a(x) = axa^{-1}$, es un automorfismo.

Demostración: Se propone como Ejercicio.

DEFINICION 8: El automorfismo g_a anterior, se dice automorfismo interno de G.

DEFINICION 9: Dos subconjuntos S,T de G , se dicen conjugados en G, si existe un automorfismo interno g_a de G tal que: $T = g_a(S)$. En particular, dos elementos x,y de G se dicen conjugados en G, si existe un a de G tal que: $y = axa^{-1}$.

TEOREMA 11: La relación R definida en G mediante: $xRy \Leftrightarrow (\exists\, a \in G)\ y = axa^{-1}$, es de equivalencia.

Demostración: Se propone como Ejercicio.

EJERCICIOS:

11. Demostrar que un subgrupo S de G es invariante, si y solo si: $(\forall\, a \in G)\ g_a(S) = S$, es decir, si es invariante para todos los automorfismos internos.
12. Probar que el conjunto Int(G) de los automorfismos internos de G, es grupo con la operación "producto de aplicaciones".

Notemos que todo este párrafo conserva su validez, aunque la operación * en G' sea arbitraria, ya que por ser f homomorfismo, la estructura (f(G),*) sigue siendo grupo.

5.GRUPO MONOGENO. GRUPO CICLICO.

DEFINICION 10: Un grupo G se llama monógeno si es el conjunto de potencias de un elemento a. Este se dice generador de G, y G se dice engendrado por a. Si además G es finito, se llama grupo cíclico.

TEOREMA 12: Un grupo monógeno infinito es isomorfo a (Z,+). Un grupo cíclico de orden p es isomorfo a (Z/Zp, +).

Demostración: Sea a un generador de G. Entonces, la aplicación $f: Z \longrightarrow G$, definida por: $f(n) = a^n$, es claramente un homomorfismo de (Z,+) sobre (G,.) ; su núcleo es un subgrupo aditivo de Z, y portanto: Ker f = Zp , donde $p \geq 0$. Puede suceder:

1°) $p = 0$, Ker f = 0 , f es inyectiva, luego es isomorfismo.

2°) $p > 0$; entonces, en virtud del primer teorema de isomorfía, Z/Zp y $f(G) = G$ son isomorfos. <>

COROLARIO 12.1: En un grupo finito G, el subgrupo S engendrado por un elemento a es cíclico. El orden de S se dice orden de a.

EJERCICIOS:

13: Si el orden de un elemento a es 12 y el de uno b es 30, hallar el orden de ab . Sabiendo que: $ab=ba$, $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = e$

14. Demostrar que cualquier subgrupo de un grupo cíclico, es tambien cíclico.

El concepto de grupo monógeno es un caso particular del siguiente.

DEFINICION 11: Dada una parte B de un grupo G, la intersección de la familia de los subgrupos de G que contienen a B, es un subgrupo S que se dice engendrado por B , y B se dice sistema generador de S.

DEFINICION 12: Un grupo se dice de tipo finito si posee un sistema generador finito.

No confundir los conceptos "G finito (ó de orden finito)" y "G de tipo finito".

6.PRODUCTO CARTESIANO DE GRUPOS.

Aplicando a dos grupos $(G,.)$ y $(G',*)$ el concepto general expresado en la Definición 4 de la Lección 4 (v. pg.18), se tiene:

DEFINICION 13: El producto cartesiano del grupo G por el G' es la estructura $(G\times G', .\times *)$, es decir, el conjunto producto $G\times G'$ dotado de la operación producto $(.)\times(*)$. Es un grupo, por lo que tambien se dice grupo producto de G por G'.

EJERCICIOS:

15. Demostrar que el producto cartesiano anterior es efectivamente un grupo con la operación $(.)\times(*)$.

16. Probar que la aplicación $p: G\times G' \longrightarrow G$, dada por: $p(a,a') = a$, es un homomorfismo, y determinar su núcleo.

LECCION 7

1. GRUPO SIMETRICO S(n). TRASPOSICIONES. CICLOS.

Ya se mencionó (v. pg.28, Ejemplo 5) que el conjunto de las permutaciones de un conjunto E, es un grupo con la operación "producto de aplicaciones".

DEFINICION 1: Dicho grupo recibe el nombre de grupo simétrico de E, y se escribe S(E). Si $E = \{1,2,\dots,n\}$, se escribe S(n).

En lo que sigue, estudiamos el S(n), y cuando digamos permutación nos referimos a una del S(n).

Si es α una permutación, la n-tupla $(\alpha 1,\alpha 2,\dots,\alpha n)$ se dice n-tupla imagen de α.

Por abuso de lenguaje, se dice "permutación" de los números $(1,2,\dots,n)$ a una n-tupla imagen de una cierta permutación. No confundir ambos conceptos.

Recordemos que la permutación idéntica 1_E es la que aplica cada elemento de E en sí mismo, es decir, "deja fijos" todos los elementos de E; su n-tupla imagen es $(1,2,\dots,n)$.

DEFINICION 2: Una transposición es una permutación t que deja fijos todos los números de E menos dos (i,j) que "permuta" entre sí: $ti = j$, $tj = i$.

DEFINICION 3: Un ciclo es una permutación c que deja fijos (n-r) elementos de E, y "permuta circularmente" los demás, es decir, existe una ordenación $(i_1,\dots, i_r)$ de estos, tal que: $ci_1 = i_2$, $ci_2 = i_3$,..., $ci_r = i_1$. Se dice que c opera sobre el conjunto $\{i_1,\dots,i_r\}$, y se escribe: $c = [i_1,\dots,i_r]$.

EJERCICIOS:

1. Probar que el orden del ciclo c precedente es igual a r.
2. Demostrar que dos ciclos que operan sobre partes disjuntas de E, son permutables

TEOREMA 1: Toda permutación α es igual a un producto de ciclos.

Demostración: Si $\alpha = 1_E$, es inmediato que: $c^r = 1_E$, para cualquier ciclo de orden r.

Si $\alpha \neq 1_E$, sea i_1 un elemento tal que: $\alpha i_1 = i_2 \neq i_1$. Aplicando $\underline{\alpha}$ a i_2, etc., tenemos: $\alpha i_2 = i_3$, $\alpha i_3 = i_4$,... ; en la sucesión: $i_1, i_2, \ldots$, necesariamente finita, sea i_{r+1} el primer elemento que se repite. Entonces: $i_{r+1} = i_1$, ya que si fuese por ejemplo: $i_{r+1} = i_3$, $\alpha i_r = \alpha i_2 \Rightarrow i_r = i_2$, contra la hipótesis.

Ahora, si r = n, ó si los elementos de $E' = E - \{i_1, \ldots, i_r\}$ son fijos por α , esta es un ciclo.

Si r < n, y algún elemento j_1 de E' es tal que: $\alpha j_1 = j_2 \neq$ $\neq j_1$, hacemos como antes. Así siguiendo, por ser $\underline{n}$ finito, llegaremos a agotar todos los elementos de E, y se tendrá:
$\alpha = c_i . c_j . \ldots . c_h$, donde c_i es el ciclo que opera sobre $\{i_1, \ldots, i_r\}$, etc., siendo indiferente el orden del producto, ya que los conjuntos (i)(j)...(h) son disjuntos. <>

COROLARIO 1.1: Toda permutación es un producto de trasposiciones.

Demostración: En virtud del teorema anterior, es suficiente probar que todo ciclo lo es. Pero para esto, basta comprobar que: $[i_1, \ldots, i_r] = [i_1, i_2].[i_2, i_3] \ldots .[i_{r-1}, i_r] = t_1 . \ldots . t_{r-1}$.<>

EJERCICIO:

3. Descomponer en producto de ciclos y de trasposiciones, permutaciones dadas.

2.CLASE DE UNA PERMUTACION.

En una n-tupla $(\alpha 1, \ldots, \alpha n)$, los elementos $(\alpha i, \alpha j)$ forman inversión si $(\alpha i - \alpha j)$ tiene distinto signo que $(i - j)$. El número total de inversiones de dicha n-tupla se obtiene comparando cada elemento con todos los siguientes.

DEFINICION 4: Se llama clase ó paridad de una permutación α , a la paridad del número $I(\alpha)$ de inversiones que presenta su n-tupla imagen. Se llama <u>signatura</u> de α al número: $(-1)^{I(\alpha)}$; se escribe: sig α .

<u>Consecuencia</u>: La permutación idéntica es de clase par, puesto que: $I(1_E) = 0$.

TEOREMA 2: Si t es una transposición, la signatura de α es opuesta a la de $t.\alpha$.

Demostración: Sea $t = [i,j]$; entonces, si comparamos $(\alpha 1,\ldots,\alpha n)$ con ($t(\alpha 1),\ldots,t(\alpha n)$), los elementos distintos de i,j ocupan el mismo lugar en ambas n-tuplas, y los i,j están permutados; podemos indicar esto, representándolas así:

$1^a = (\ldots,i,\ldots,j,\ldots)$, $2^a = (\ldots,j,\ldots,i,\ldots)$.

El paso de la 1^a a la 2^a puede pues hacerse, permutando <u>i</u> con el siguiente consecutivo, después con su nuevo siguiente, etc., hasta permutarle con j ; quedará: $(\ldots\ldots,j,i,\ldots)$. Y a continuación, permutando j con su precedente, etc., hasta ocupar el lugar que tenía <u>i</u> inicialmente.

Cada trasposición de elementos consecutivos $i_1 i_2$ cambia la clase, pues la posición relativa de cada elemento de la n-tupla con los siguientes, no cambia, excepto la del par $i_1 i_2$ que se convierte en $i_2 i_1$; en definitiva, el número de inversiones aumenta ó disminuye en 1, luego ha cambiado la clase.

Ahora bien, si es <u>m</u> el número de elementos comprendidos entre i,j en la permutación 1^a, el paso de esta a la 2^a se ha realizado aplicando $m+1+m = 2m+1$ trasposiciones de elementos consecutivos, y por ello, la signatura de la 2^a resulta de multiplicar por $(-1)^{2m+1} = -1$, la de la 1^a, luego dichas signaturas son opuestas. <>

COROLARIO 2.1: Toda transposición es de clase impar. Pues: $t = t.1_E$, y 1_E es de clase par.

TEOREMA 3: Si una permutación α es el producto de <u>r</u> trasposiciones, la paridad de <u>r</u> es igual a la de α.

Demostración: Sea $\alpha = t_1 t_2 \ldots t_r$. Por el terema anterior, sig $\alpha = (-1).\mathrm{sig}(t_2\ldots t_r) = (-1).(-1).\mathrm{sig}(t_3\ldots t_r) = \ldots = (-1)^r$.<>

COROLARIO 3.1: Si son α_1, α_2 dos permutaciones, se tiene: $sig(\alpha_1.\alpha_2) = sig\ \alpha_1.sig\ \alpha_2$.

Por tanto, la aplicación sig: $S(n) \longrightarrow \{1,-1\}$, dada por: $\alpha \longrightarrow sig\ \alpha$, es un homomorfismo de $S(n)$ en el grupo multiplicativo $\{1,-1\}$. El núcleo de esta aplicación, ó sea, el conjunto de las permutaciones de clase par, es un subgrupo invariante de $S(n)$, que recibe el nombre de grupo alternado, y se indica $A(n)$.

EJERCICIOS:

4. Demostrar que el grupo alternado es de índice 2 respecto de $S(n)$.
5. Probar que el grupo alternado no posee subgrupos propios invariantes.

LECCION 8

1.ANILLO. PRIMERAS PROPIEDADES.

DEFINICION 1: Un anillo es un conjunto A dotado de dos operaciones internas, que indicaremos (+) y (.), tales que:

1°) la estructura (A, +) es un grupo abeliano.

2°) la operación (.) es asociativa, y distributiva respecto de (+).

La operación (+) se conoce como suma del anillo, y la (.) como producto.

El elemento neutro de (+) se llama cero del anillo, y se escribe 0 como de costumbre.

La operación (.) puede no tener elemento neutro en A, pero si lo tiene se llama unidad del anillo, y se indica con e ó 1.

Un elemento a se dice regular, si lo es para el producto (v. pg.22, Def.13). Se dice inversible si es simetrizable para dicha operación, y a^{-1} se dice inverso de a.

La operación (.) puede no ser conmutativa; si lo es, el anillo se dice conmutativo.

Dos elementos del anillo se dicen permutables si lo son respecto de (.). Se llama centro del anillo A, al centro de la estructura (A,.).

EJEMPLOS:

1. Z, Q, R, C, son anillos con las operaciones suma y producto conocidos. Poseen 1 y son conmutativos.
2. El conjunto Z2 (enteros pares) es anillo con (+) y (.) ordinarios. No posee unidad.

EJERCICIOS:

1. Sea (G,+) un grupo abeliano, y E el conjunto de sus endomorfismos. Definimos una operación binaria interna (+) en E mediante: $(\forall a \in G)\ (f + g)a = fa + ga$. Y sea (.) el producto de aplicaciones. Demostrar:
   1°) (E,+) es grupo abeliano.
   2°) (E, +, .) es anillo, en general no conmutativo.
2. Demostrar que el conjunto de elementos inversibles de un anillo, es grupo con la operación (.).

<u>Primeras propiedades de un anillo A.</u>

1ª) Las que posee como grupo abeliano de operación (+).

2ª) $(\forall a \in A)\quad a.0 = 0.a = 0.$

En efecto, $ab = a(b + 0) = ab + a.0$, luego: $a.0 = ab - ab = 0.$

3ª) $(\forall a,b \in A)\quad (-a)b = a(-b) = -ab$.

En efecto, $[(-a)b] + ab = (-a + a)b = 0.b = 0$, luego $(-a)b$ y <u>ab</u> son opuestos.

4ª) $(\forall a,b \in A)\quad (-a).(-b) = ab.$

En efecto, aplicando la propiedad anterior se tiene: $(-a)(-b) = -[a(-b)] = -[-ab] = ab.$

Las propiedades 3ª y 4ª precedentes constituyen la <u>regla de los signos</u> del producto, válida para todo anillo, como se ve.

DEFINICION 2: Un elemento $a \neq 0$ de A, se dice <u>divisor de cero</u>, si existe otro $b \neq 0$, tal que: $ab = 0$, ó: $ba = 0$.

TEOREMA 1: Un elemento <u>a</u> es divisor de cero, si y solo si es <u>no</u> regular.

Demostración: Se propone como Ejercicio.

DEFINICION 3: Un anillo A se llama <u>anillo de integridad</u> (ó <u>dominio de integridad</u>) si es conmutativo, no posee ningún divisor de cero, y tiene unidad <u>e</u>.

No poseer divisores de cero, equivale a decir que todo elemento de A distinto del cero, es regular. Este hecho se suele expresar diciendo que "en A es válida la <u>ley de simplificación</u> para el producto".

EJERCICIO:

3. En el caso del Ejercicio 1, poniendo $G = \mathbb{R}^2$, comprobar que el anillo de endomorfismos de G posee divisores de cero.

De acuerdo con las notaciones ya indicadas en el párrafo 4 de la Lección 4 (v. pg.22), si <u>a</u> es un elemento del anillo A, se escribirá: $a \overset{n}{+\cdots+} a = na$ (<u>n</u> número natural) ; $-a -\ldots-a = -na$; $a. \overset{n}{\cdots} .a = a^n$; $a^{-1}. \overset{n}{\cdots} .a^{-1} = a^{-n}$.

Si A posee unidad <u>e</u>, sabemos que el conjunto Ze es un grupo monógeno con la operación (+).

DEFINICION 4: En un anillo A con unidad <u>e</u>, si el grupo Ze es infinito, se dice que A tiene <u>característica</u> cero (ó que no tiene característica). Si el grupo Ze es finito, se llama <u>característica de A</u> al orden <u>p</u> del grupo, es decir, al menor número natural p tal que: pe = 0.

EJERCICIO:

4. Demostrar que en un anillo de característica p, se tiene: pa = 0 , para cualquier elemento <u>a</u>.

2. SUBANILLO. IDEALES.

Sea A un anillo.

DEFINICION 5: Un <u>subanillo</u> de A es una parte B de A, estable para las operaciones (+) y (.), y tal que la estructura (B, +, .) es anillo.

EJEMPLOS:

3. Cada uno de los anillos Z, Q, R, C, es subanillo de todos los que le siguen.
4. El conjunto Zp , p fijo, es subanillo del anillo Z.

TEOREMA 2: Una parte B de A es subanillo, si y solo si cumple: 1°) $(B,+)$ es subgrupo de $(A,+)$; 2°) $B.B \subset B$.

Demostración: Se propone como Ejercicio.

Sea ahora B un subgrupo aditivo de A; como $(A,+)$ es grupo abeliano, $(B,+)$ es subgrupo invariante y por tanto, la relación R de equivalencia en A, cuyas clases son los elementos de A/B , es estable para la operación (+); recordemos que: $aRa' \Leftrightarrow a - a' \in B$.

Interesa estudiar en qué caso R será tambien estable para la operación (.) de A.

TEOREMA 3: Sea B un subgrupo aditivo de A, y R la relación de equivalencia en A dada por: $aRa' \Leftrightarrow a-a' \in B$. Entonces, R es estable para el producto, si y solo si se cumple:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B) \quad ab \in B \quad y \quad ba \in B \qquad (1).$$

Demostración:

Si) Si se cumple (1) resulta: aRa' , $cRc' \Leftrightarrow$ $(\exists\, b,b' \in B)\ a = a'+ b$, $c = c'+ b' \Rightarrow ac = a'c'+ a'b'+ bc'+bb'$ $\Rightarrow$ (por (1)) $ac - a'c' \in B$.

Solo si) Si R es estable para el producto, se tiene: $(\forall b \in B)\ c = c'+ b \Leftrightarrow cRc' \Rightarrow (\forall a \in A)\ acRac'$ (por ser R estable) $\Leftrightarrow ac - ac' = ab \in B$. Analogamente se sigue: $ba \in B$. $\Diamond$

DEFINICION 6: Se llama <u>ideal bilátero</u> del anillo A, a un subgrupo aditivo B que cumpla la propiedad (1).

· Si solo cumple $ab \in B$, se dice <u>ideal a izquierda</u>; si solamente $ba \in B$, se llama <u>ideal a derecha</u> de A.

En el caso de A conmutativo, los tres conceptos coinciden, y reciben el nombre de <u>ideal</u> a secas.

Del Teorema 2 anterior se sigue que todo ideal bilátero es subanillo. El recíproco no es cierto.

TEOREMA 4: Si B es ideal bilátero de A, el conjunto A/B con las operaciones (+) y (.) inducidas por las de A, es un anillo.

Demostración: En efecto, $(A/B, +)$ es un grupo abeliano, por serlo $(A,+)$. Además, la operación (.) es asociativa en A/B, por ser asociativo el producto en A. Finalmente, (.) es distributiva respecto de (+) en A/B, por serlo en A el producto respecto de la suma (v. pg.21, Teor.4). <>

DEFINICION 7: El anillo A/B anterior se dice anillo cociente de A sobre B.

Todo anillo A tiene al menos dos ideales biláteros: el ideal nulo $\{0\}$, y el ideal unidad A ; ambos se dicen ideales impropios. Cualquier otro ideal se dice propio.

EJERCICIOS:

5. Demostrar que cualquier subanillo de Z es un ideal.
6. Demostrar que el anillo cociente Z/Zp tiene característica p (anillo de los enteros módulo p).
7. Probar que el anillo Z/Zp es de integridad si y solo si p es primo.

3. HOMOMORFISMO DE ANILLOS.

Dos anillos son dos estructuras análogas; aplicando la definición general de homomorfismo (v. pg.25, Def.2), se tiene:

DEFINICION 8: Un homomorfismo de un anillo $(A,+,.)$ en un anillo $(A',+,*)$ es una aplicación $f: A \longrightarrow A'$, que cumple:

$$(\forall a,b \in A) \quad f(a+b) = fa + fb \ , \quad f(a.b) = fa*fb \ .$$

No hay inconveniente práctico en designar con el mismo signo (+) las dos operaciones suma en A y A', porque no da lugar a confusión, ya que los elementos que suman cada signo + indican claramente si son de A ó de A'.

EJEMPLO:

5. La aplicación canónica: $Z \longrightarrow Z/Zp$, es un homomorfismo de anillos.

TEOREMA 5: Si f es un homomorfismo de anillos: A ---> A', la imagen f(A) es un subanillo de A'.

Demostración: En virtud del Teorema 1 de la Lección 5 (v. pg.26), f(A) es estable para las operaciones de A', y es subgrupo aditivo de A'. Por lo tanto, es subanillo de A'. <>

Notemos que la demostración anterior vale tambien para probar el teorema siguiente.

TEOREMA 5 BIS: Si f es un homomorfismo de un anillo A en una estructura análoga (A', +, *), la imagen f(A) es un anillo con las operaciones (+) y (*).

Aplicando a f los resultados del Teorema 2 de la Lección 5 (v. pg.26), y del Teorema 3 precedente, se tiene:

TEOREMA 6: La relación de equivalencia R asociada a f, es estable para las operaciones de A, y por lo tanto se sigue: 1°) la clase [0], es decir, el conjunto $f^{-1}(0') = B$, es un ideal bilátero, y tal que: $[a] = f^{-1}(a) = a + B$; 2°) la aplicación $\bar{f}$: A/B ---> f(A), dada por: $\bar{f}(a + B) = fa$, es un isomorfismo de anillos.

DEFINICION 9: El conjunto $f^{-1}(0')$ se llama núcleo del homomorfismo f, y se indica tambien: Ker f.

COROLARIO 6.1 (Teorema de isomorfía de anillos): Si f: A ---> A' es un homomorfismo de anillos, el anillo cociente A/Ker f es isomorfo al anillo imagen Im f.

TEOREMA 7: Si B es un ideal bilátero de A, la aplicación p: A ---> A/B, dada por: p(a) = a + B, es un homomorfismo suprayectivo cuyo núcleo es B (se dice homomorfismo canónico de A sobre A/B).

Demostración: Se propone como Ejercicio.

EJERCICIOS:

8. Si a es un elemento inversible de un anillo A, demostrar que la aplicación g_a: A ---> A dada por: $g_a(x) = axa^{-1}$, es un automorfismo de A. Se dice automorfismo interno de A.

9. Sea a un elemento fijo cualquiera de A. Es evidente que la aplicación f_a: A —> A dada por: $f_a(x) = ax$, es un endomorfismo del grupo abeliano (A,+). Se tiene así una aplicación f: A —> E , definida escribiendo: $f(a) = f_a$. Probar que f es homomorfismo de anillos, y establecer qué condiciones deben cumplir los elementos de Ker f.

LECCION 9

1.DIVISIBILIDAD EN DOMINIOS DE INTEGRIDAD.

En un anillo conmutativo A, se utiliza la nomenclatura de la divisibilidad conocida en el anillo Z. Así pues:

DEFINICION 1: Dados dos elementos a,b de A, se dice que a es divisible por b, ó que a es múltiplo de b, ó que b es divisor de a, si existe un elemento $q \in A$, tal que: $a = bq$. Se escribe: $b|a$.

TEOREMA 1: La relación binaria |, llamada relación de divisibilidad, es transitiva.

Demostración: Es bien conocida.

TEOREMA 2: Si el anillo posee unidad e, la relación | es reflexiva.

Demostración: $(\forall a \in A)$ $a = ae$, luego: $a|a$.<>

Suponemos en lo sucesivo que A posee unidad.

DEFINICION 2: Diremos que un elemento a es asociado a uno b , si existe un u inversible, tal que: $a = bu$.

TEOREMA 3: La relación R definida por: aRb <=> a es asociado a b , es una relación de equivalencia.

Demostración: 1°) aRa , puesto que: $a = ae$;

2°) aRb <=> $a = bu$ <=> $au^{-1} = b$ <=> bRa ;

3°) aRb y bRc <=> $a = bu$, $b = cv$ => $a = c(vu)$ <=> aRc , ya que vu es inversible por serlo u y v. <>

La clase de equivalencia $[a] = \{b \mid b = au , u \text{ inversible}\}$ se dirá clase de asociados.

TEOREMA 4: La relación $|$ es <u>estable</u> para R, es decir, aRa' y bRb' y $a|b \Rightarrow a'|b'$.

Demostración: $a' = au$, $b' = bv$ y $b = aq \Rightarrow b' = aqv = a'u^{-1}qv \Rightarrow a'|b'$.<>

Se tiene así una relación en A/R , <u>inducida</u> por $|$, y que indicaremos con el mismo signo $|$. Es decir, definimos:

$$[a]|[b] \iff a|b \ .$$

Es inmediato que esta relación de divisibilidad en A/R tiene tambien las propiedades reflexiva y transitiva.

TEOREMA 5: Si A es dominio de integridad, la relación $|$ en A/R , es antisimétrica.

Demostración: $[a]|[b]$ y $[b]|[a] \iff a|b$ y $b|a \iff b = aq$ y $a = bc \Rightarrow b = b(cq) \Rightarrow be = b(cq) \Rightarrow$ (por ser A de integridad) $e = cq \Rightarrow q$ inversible $\Rightarrow [a] = [b]$. <>

COROLARIO 5.1: La relación de divisibilidad en A/R es de orden.

DEFINICION 3: Un elemento $a \neq 0$ de A se dice <u>primo</u> ó <u>irreducible</u>, si solo es divisible por sus asociados.

EJERCICIOS:

1. Demostrar que la clase $[e]$ se compone exactamente de los elementos inversibles.
2. Comprobar que un elemento $p \neq 0$ es primo, si y solo si la clase $[p]$ es <u>minimal</u> para la relación de orden definida en A/R .
3. Probar que el conjunto de los múltiplos de un elemento <u>a</u>, es un ideal. Se llama <u>ideal principal</u> de <u>generador</u> <u>a</u>.
4. Indicando con (a) el ideal anterior, demostrar que: $(a) \subset (b) \iff b|a$.
5. Sea I el conjunto de los ideales principales de A, ordenado por la relación de inclusión. Comprobar que la ley $f: A/R \longrightarrow I$, dada por: $f[a] = (a)$, es aplicación, y que invierte el orden.

2.CUERPO.

DEFINICION 4: Llamamos cuerpo a un anillo K que cumple: 1°) es conmutativo , 2°) posee unidad e , 3°) todo elemento, excepto el cero, es inversible. 4°) $0 \neq 1$

Consecuencias:

1ª) El conjunto $K - \{0\}$, que se indica K^*, es grupo abeliano con la operación producto.

2ª) Como todo elemento no nulo es regular, K es dominio de integridad.

3ª) $(\forall a)(\forall b \neq 0) \ \exists c \ni a = bc$; es el elemento $b^{-1}a = ab^{-1}$. Se escribe tambien: a/b y se llama cociente de a por b ó fracción a sobre b.

EJEMPLOS:

1. Los anillos Q, R y C son cuerpos.
2. El conjunto $[a + b\sqrt{2} \ni a,b \in Q]$ es cuerpo con la suma y producto ordinarios.

EJERCICIOS:

1. Probar que los únicos ideales de un cuerpo son $\{0\}$ y K.
2. Comprobar que las reglas de suma y producto de fracciones de Z son las mismas conocidas en el cuerpo de los números racionales.

TEOREMA 6: Todo dominio de integridad finito D, es un cuerpo.

Demostración: Sea a un elemento de D, distinto del 0. La aplicación $f: D \longrightarrow D$ dada por: $f(x) = ax$, es inyectiva, ya que: $ax = ay \Rightarrow x = y$, por ser a regular. Pero siendo D finito, f(D) tiene el mismo número de elementos que D, luego f es suprayectiva, y por tanto, existe un elemento b de D tal que: $f(b) = e$, es decir, $ab = e$, luego a es inversible. <>

EJEMPLO:

3. Ya vimos (pg.43, Ejercicio 7) que el anillo cociente Z/Zp es dominio de integridad si p es primo. Como es finito

(tiene p elementos), es un cuerpo.

Característica de un cuerpo.

Como anillo que es, un cuerpo K tiene característica p. Puede ser 0 (caso de Q, R ó C), pero si es $p \neq 0$, debe ser primo, ya que si: $p = mn$, donde $m \neq 1$ y $n \neq 1$, los elementos me y ne son divisores de cero, pues se tiene: $me.ne = mne = pe = 0$.

DEFINICION 5: Un subcuerpo de un cuerpo K es una parte H de K, que es cuerpo con las mismas operaciones que K.

TEOREMA 7: Una parte H de K es subcuerpo, si y solo si cumple: 1°) $(H,+)$ es subgrupo de $(K,+)$; 2°) $(H^*,.)$ es subgrupo de $(K^*,.)$.

Demostración: Se propone como Ejercicio.

DEFINICION 6: Un cuerpo se dice cuerpo primo si no posee ningún subcuerpo propio.

TEOREMA 8: Sea K un cuerpo y p su característica. Entonces, si $p = 0$, el conjunto $H = [me/ne \nrightarrow m \in Z,\ n \in N^*]$ es un subcuerpo isomorfo a Q. Si $p \neq 0$, $J = [me \nrightarrow m \in Z]$ es un subcuerpo isomorfo a Z/Zp.

Demostración:

1°) Sea f la aplicación: $Q \dashrightarrow H$, dada por: $f(m/n) = me/ne$. Es fácil comprobar que se trata de un homomorfismo suprayectivo. Pero tambien es inyectivo, puesto que: $me/ne = m'e/n'e \Rightarrow mn'e = nm'e \Rightarrow mn' = nm'$ (por ser $p=0$) $\Rightarrow m/n = m'/n'$.

2°) Sea $f: Z \dashrightarrow J$, dada por: $f(m)= me$; es claramente un homomorfismo suprayectivo cuyo núcleo es Zp , y por el Teorema de isomorfía de anillos, se tiene: Z/Zp es isomorfo a J.<>

Notemos que el único subcuerpo primo de un cuerpo K es: H si $p = 0$, y J si $p \neq 0$.

EJERCICIOS:

3. ~~Comprobar que el centro de un cuerpo K, es subcuerpo.~~

LECCION 10

1. VECTORES LIBRES EN EL PLANO ORDINARIO.

Entendemos por plano ordinario ó plano intuitivo, a esa figura, un tanto complicada, conjunto de objetos y propiedades cuyo conocimiento hemos adquirido sobre todo a través de la intuición sensible. Puntos, rectas, segmentos y ángulos son sus objetos principales. Su conocimiento consciente se inicia ya en la Escuela Primaria y se continúa en la Secundaria. El método seguido en dichos Grados para estudiarlo, ha sido en parte intuitivo y en parte lógico, es decir, hay propiedades que se admiten solamente por motivos intuitivos , y otras que se demuestran con razones lógicas, apoyándose naturalmente en resultados ya admitidos.

Lo que diferencia este método digamos mixto, con el que hemos seguido en las Lecciones precedentes, típico del Grado Superior, es que este establece explícitamente, al comenzar el estudio de cualquier concepto, las propiedades del mismo que se admiten porque sí (en realidad, por razones intuitivas, como se ve en los Ejemplos), y todas las demás propiedades se van demostrando lógicamente a partir de las primeras. Es decir, aunque este método es tambien "mixto", no mezcla , cronológicamente hablando, las propiedades a priori con las deducidas lógicamente. Notemos, que el conjunto de propiedades a priori constituye la definición del concepto; estas suelen llamarse axiomas definidores del mismo.

Volvamos a nuestro plano ordinario, concepto típico del Grado Medio, cuyo método de estudio, de mezcla, va bien con el desarrollo mental del alumnado correspondiente.

A cada segmento se le asigna una longitud, es decir, un número real positivo. Claro que esto se hace teniendo una idea no muy exacta del número real, pero suficiente para el objeto.

Un vector fijo es un segmento AB ordenado, esto es: $\overline{AB} \neq \overline{BA}$

llamándose <u>origen</u> del vector al punto A y <u>extremo</u> al punto B.

Pues bien, en el conjunto E de dichos vectores fijos, se define la relación R siguiente, llamada de <u>equipolencia</u>:

$\overline{AB}\ R\ \overline{A'B'} \iff ABB'A'$ es un paralelogramo.

Dicha relación es de equivalencia, y clasifica el conjunto E de vectores fijos del plano ordinario en clases disjuntas.

DEFINICION 1: Un <u>vector libre</u> del plano ordinario es una clase de vectores fijos equipolentes, es decir, un elemento del conjunto cociente E/R.

Se sabe que por cada punto O del plano, y cada vector libre <u>a</u>, existe un vector fijo y solo uno de origen O y perteneciente a <u>a</u>. Simbólicamente:

$(\forall\, O \in \text{plano})(\forall\, a \in E/R)\quad \exists!\, \overline{OP} \in a$.

Se sigue que el conjunto de vectores fijos de origen O dado, es un sistema completo de representantes de R.

Sean <u>a</u> y <u>b</u> dos vectores libres, y $\overline{AB}$ un vector fijo representante de <u>a</u> ; por lo dicho anteriormente, existe un representante $\overline{BC}$ de <u>b</u> , de origen B. Se tiene así un vector fijo $\overline{AC}$. Pues bien, la clase $[\overline{AC}]$ queda definida univocamente por <u>a</u> y <u>b</u>, y se dice <u>suma</u> de <u>a</u> y <u>b</u> , indicándose: a + b. Es decir:

$\overline{AB}\ R\ \overline{A'B'}\quad y\quad \overline{BC}\ R\ \overline{B'C'} \implies \overline{AC}\ R\ \overline{A'C'}$.

Esta propiedad del plano ordinario, se conoce con el nombre de <u>Teorema restringido de DESARGUES</u>. (Hagase la figura).

DEFINICION 2: La operación binaria (+) definida anteriormente en E/R recibe el nombre de <u>suma de vectores libres</u>.

TEOREMA 1: El conjunto de vectores libres del plano ordinario, con la operación (+) anterior, es un grupo abeliano.

Demostración: Se hace apoyándose en las propiedades de dicho plano.

Por otra parte, si es <u>t</u> un número real y $\overline{AB}$ un vector fijo, se llama <u>producto de t por $\overline{AB}$</u> al vector $\overline{AC}$ definido asi:

1°) su origen es el mismo de $\overline{AB}$.

2°) su longitud es $/\overline{AC}/ = /t//\overline{AB}/$.

3°) su dirección es la misma de $\overline{AB}$.

4°) su sentido es el mismo de $\overline{AB}$ si $t > 0$, y contrario si $t < 0$.

Se escribe: $\overline{AC} = t.\overline{AB}$.

Pues bien, esta operación externa sobre el conjunto de vectores fijos, es estable para la relación de equipolencia, es decir:

$$\overline{AB}\ R\ \overline{A'B'} \Rightarrow t.\overline{AB}\ R\ t.\overline{A'B'} \ .$$

DEFINICION 3: La operación externa (.) inducida por la anterior en E/R, es decir, la operación definida por: $t.[\overline{AB}] = [t.\overline{AB}]$, se dice <u>producto de un vector por un número real</u>.

TEOREMA 2: La operación externa anterior tiene las siguientes propiedades: ($\forall$ a,b $\in$ E/R) ($\forall$ t,s reales)

1ª) $t(a + b) = ta + tb$.

2ª) $(t + s)a = ta + sa$.

3ª) $t(sa) = (ts)a$.

4ª) $1.a = a$.

Demostración: Las 2ª 3ª y 4ª son consecuencias inmediatas de las definiciones 2 y 3. La 1ª se demuestra apoyándose en las propiedades del plano ordinario.

<u>Vectores libres en el espacio ordinario</u>.

Su definición, así como las definiciones y propiedades de la suma y producto por un número real, son totalmente análogas a las anteriores.

<u>2.ESPACIO VECTORIAL. GENERALIDADES</u>.

Sea K un cuerpo.

DEFINICION 4: Se llama <u>espacio vectorial sobre K</u> a un conjunto V dotado de una operación interna (+) y una externa (.) con K como dominio de operadores, tales que:

i) la estructura (V,+) es un grupo abeliano.

ii) la operación externa cumple ($\forall$ t,s $\in$ K)($\forall$ a,b $\in$ V):

1°) $t(a + b) = ta + tb$.

2°) $(t + s)a = ta + sa$.

3°) $t(sa) = (ts)a$.

4°) $1.a = a$.

Los elementos de V se dicen vectores y los de K escalares.

Notemos una vez más, que se usa el mismo signo + para indicar operaciones distintas (aquí la suma en K y en V), pero que no ha lugar a confusión, fijándose en los elementos que une el signo + en cada caso. Lo mismo puede decirse del signo (.), que indica tanto el producto en K, como la operación externa sobre V, la cual se dice tambien: producto de t por a.

Consecuencias de la definición.

1ª) Si multiplicamos el cero de K por cualquier vector, se obtiene el vector nulo de V: $0.a = \bar{0}$. En efecto:

$$ta = (t + 0)a = ta + 0.a \Rightarrow 0.a = \bar{0}.$$

2ª) El opuesto de a : $-a = (-1).a$. En efecto:

$$a + (-1).a = 1.a + (-1).a = (1 - 1).a = 0.a = \bar{0} \ .\langle\rangle$$

EJEMPLOS:

1. El conjunto de vectores fijos del plano (espacio) ordinario que tengan un mismo punto origen.
2. El conjunto de vectores libres del plano (espacio)ordinario.
3. El cuerpo K con la operación (+) considerada como interna, y la (.) considerada como externa con dominio K de operadores.
4. El conjunto producto K^n con la operación interna (+) extensión de la suma en K, y la externa (.) definida así:
$$t.(t_1,\ldots,t_n) = (tt_1,\ldots,tt_n).$$
5. El conjunto de polinomios de una letra x indeterminada, con coeficientes en K, donde (+) es la suma de polinomios, y (.) el producto por un número de K. Se indica a este conjunto: K[x].

EJERCICIO:

1. Demostrar que: $ta = \bar{0} \Rightarrow t = 0$ ó $a = \bar{0}$.

En lo sucesivo, V designa un espacio vectorial sobre K.

DEFINICION 5: Se dice subespacio vectorial de V a una parte S de V, que es espacio vectorial con las mismas operaciones que V.

TEOREMA 3: Una parte S de V es subespacio vectorial si y solo si cumple: 1°) es subgrupo aditivo de V, 2°) es estable para la operación externa.

Demostración: Se propone como Ejercicio.

Notemos que un subgrupo aditivo de un espacio vectorial no tiene porqué ser subespacio; por ejemplo, $\mathbb{R}^2$ es subgrupo aditivo del espacio vectorial $\mathbb{C}^2$, y no es subespacio vectorial de $\mathbb{C}^2$.

EJERCICIO:

2. Dar ejemplos de subespacios vectoriales en los Ejemplos 1 a 5 precedentes.

Sea S un subespacio de V. Como V es grupo abeliano y S subgrupo, el grupo cociente V/S es abeliano. Sabemos que los elementos de V/S son las clases de equivalencia $[a] = a + S$, correspondientes a la relación R dada por: $aRb \Leftrightarrow a - b \in S$ (v. pg.30, Teor.3). Recordemos tambien, que la operación suma en V/S es la inducida por la (+) de V y viene portanto definida así: $[a]+[b] = [a+b]$.

TEOREMA 4: En el caso precedente se tiene:

1°) la ley externa es estable para R.

2°) la estructura (V/S, +, .) inducida por las operaciones de V, es tambien un espacio vectorial sobre K.

Demostración: 1°) $aRb \Leftrightarrow a - b \in S \Rightarrow (\forall t \in K)$ $t(a - b) = ta - tb \in S$ (por ser S subespacio) $\Leftrightarrow$ ta R tb.

2°) se propone como Ejercicio. <>

DEFINICION 6: El espacio vectorial V/S anterior, recibe el nombre de espacio vectorial cociente de V sobre S.

Homomorfismo. Isomorfismo.

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre K. Son evidentemente dos estructuras análogas, y aplicando la definición general de homomorfismo (v. pg.25) a este caso, se tiene la

DEFINICION 7: Un homomorfismo (ó aplicación lineal) de V en W es una aplicación $f: V \longrightarrow W$ que cumple:

1°) $(\forall a,b \in V)\ f(a + b) = fa + fb$.

2°) $(\forall t \in K)(\forall a \in V)\quad f(ta) = t(fa)$.

Los conceptos de isomorfismo, endomorfismo y automorfismo son los casos particulares de homomorfismo, ya explicados en general (v. pg.25).

EJERCICIO:

3. Comprobar que las propiedades 1° y 2° precedentes, equivalen lógicamente a: $(\forall t,s \in K)(\forall a,b \in V)\ f(ta + sb) = t(fa)+s(fb)$.

3.PRODUCTO CARTESIANO DE ESPACIOS VECTORIALES.

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre K. Sabemos que el conjunto producto $V\times W$, dotado de la operación (+) definida por: $(a,a') + (b,b') = (a+a', b+b')$, es un grupo abeliano (v. pg.35 Def.13). Pues bien, tambien puede definirse sobre $V\times W$ la siguiente operación externa (.): $t.(a,a') = (ta, ta')$.

DEFINICION 8: La estructura $(V\times W, +, .)$ donde (+) y (.) son las operaciones precedentes, es un espacio vectorial sobre K, que se dice espacio producto $V\times W$.

Del mismo modo se define el producto cartesiano de n espacios vectoriales $V_1,\dots, V_n$ sobre un mismo cuerpo K.

EJEMPLO:

6. El espacio vectorial K^n del Ejemplo 4, es el espacio producto $K\times\dots\times K$, donde K es el espacio del Ejemplo 3.

4.SUMA E INTERSECCION DE SUBESPACIOS. SUMA DIRECTA.

DEFINICION 9: Dados p subespacios $S_1,\dots,S_p$ de V, se llama suma lineal ó suma de ellos, al conjunto:

$S_1+\ldots+S_p = \{a_1+\ldots+a_p \,/\, a_1 \in S_1, \ldots, a_p \in S_p\}$.

TEOREMA 5: La suma $S = S_1+\ldots+S_p$ y la intersección $T = S_1 \cap \ldots \cap S_p$, son subespacios vectoriales de V.

Demostración:

1°) $a,b \in S \Leftrightarrow a = a_1+\ldots+a_p$, $b = b_1+\ldots+b_p$ $(a_i, b_i \in S_i)$ $\Rightarrow a - b = (a_1-b_1)+\ldots+(a_p-b_p) \in S$, por ser: $a_i-b_i \in S_i$; tambien se tiene: $a \in S \Rightarrow ta = ta_1+\ldots+ta_p \in S$, pues $ta_i \in S_i$. Portanto (v. Teorema 3) S es subespacio.

2°) $a,b \in T \Leftrightarrow (\forall S_i)\ a,b \in S_i \Rightarrow a - b \in S_i$, $ta \in S_i$, luego: $a - b \in T$ y $ta \in T$. Por ello, T es subespacio. <>

Notemos que la demostración de 2°) es válida, aunque la familia $\{S_i\}$ no fuese finita.

DEFINICION 10: La suma S se dice suma directa, y se escribe: $S_1 \oplus \ldots \oplus S_p$, si cada elemento a de S, solo puede expresarse de una manera como suma $a_1+\ldots+a_p$, es decir,, si determina unívocamente los sumandos de la igualdad: $a = a_1+\ldots+a_p$.

Llamando componente i-sima de a, al sumando a_i, puede decirse: "la suma es directa si las componentes de cada elemento de S son únicas".

O tambien: "la suma es directa si la aplicación $f\colon S_1\times\ldots\times S_p \longrightarrow S_1+\ldots+S_p$, dada por: $f(a_1,\ldots,a_p) = a_1+\ldots+a_p$, es biyectiva".

TEOREMA 6: La suma S es directa si y solo si la igualdad $a_1+\ldots+a_p = \bar{0}$ implica: $a_1 = \bar{0}, \ldots, a_p = \bar{0}$.

Demostración: Si se cumple esta implicación, no puede suceder: $a_1+\ldots+a_p = b_1+\ldots+b_p$ con algún $a_j \neq b_j$, ya que entonces sería: $(a_1-b_1)+\ldots+(a_p-b_p) = \bar{0}$, donde (a_i-b_i) es de S_i, y un $(a_j-b_j) \neq \bar{0}$ contra la hipótesis.

Reciprocamente, si la suma es directa, la implicación anterior es inmediata.

DEFINICION 11: Los subespacios vectoriales $S_1,\ldots,S_p$ se dicen independientes si su suma es directa.

DEFINICION 12: Dos subespacios S y T se dicen suplementarios (respecto de V) si: $V = S \oplus T$.

EJERCICIOS:

4. Demostrar que en el caso de suma directa, la aplicación f anterior es un isomorfismo.
5. Demostrar que dos subespacios S y T de un espacio vectorial V, son suplementarios si y solo si: $S + T = V$ y $S \cap T = \bar{0}$.
6. Si $S = S_1 + \ldots + S_p$, comprobar que la aplicación $p_i: S \longrightarrow S_i$ dada por: $p_i(a) = a_i$ (componente i-sima de $\underline{a}$), es un homomorfismo. Se dice a p_i proyección de S en S_i. En general, se dice proyección p tal que: $p.p = p$.
7. Demostrar que, dados dos subespacios S y T de V, la suma $S + T$ es el menor subespacio que contiene a ambos, y $S \cap T$ es el mayor subespacio contenido en los dos.

5.COMBINACION LINEAL. CLAUSURA LINEAL.

Sea $(a_1, \ldots, a_p)$ una familia finita de vectores de V.

DEFINICION 13: Se llama combinación lineal de los vectores $(a_1, \ldots, a_p)$ a cualquier vector: $a = t_1a_1 + \ldots + t_pa_p$.

Tambien se dice entonces, que el vector $\underline{a}$ depende linealmente de los vectores $a_1, \ldots, a_p$.

TEOREMA 7: El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $(a_1, \ldots, a_p)$ es un subespacio vectorial S de V.

Demostración: $S = \{a \mid a = t_1a_1 + \ldots + t_pa_p \ , \ \forall\, t_i \in K\}$. Es inmediato comprobar que la diferencia de dos tales combinaciones lineales y el producto de un número de K por una tal combinación lineal, es otra del mismo tipo. <>

DEFINICION 14: El subespacio S anterior se dice clausura lineal de la familia (a_i). Tambien se dice que S está engendrado por la familia, y que esta es un sistema generador de S. Se escribe: $S = K(a_1, \ldots, a_p)$ ó $S = K(a_i)$.

DEFINICION 15: Un espacio vectorial V se dice de tipo

<u>finito</u> si admite un sistema generador finito, y <u>monógeno</u> si admite un sistema generador compuesto por un solo vector.

TEOREMA 8: Si una familia de vectores $(b_1,\dots, b_q)$ está contenida en la clausura lineal $K(a_i)$, se tiene: $K(b_j) \subset K(a_i)$.

Demostración: $b \in K(b_j) \iff b = s_1b_1+\dots+ s_qb_q$, pero $b_j= t_j^1a_1+\dots+ t_j^pa_p$, luego sustituyendo se tiene: $b = s_1(t_1^1a_1+\dots+ t_1^pa_p)+ \dots + s_q(t_q^1a_1+\dots+ t_q^pa_p) \in K(a_i)$.<>

El resultado obtenido se expresa tambien así: "si un vector <u>b</u> de-pende linealmente de los vectores $(b_1,\dots, b_q)$ y cada uno de estos depende linealmente de los (a_i), el vector <u>b</u> depende linealmente de estos últimos"(Propiedad transitiva de la dependencia lineal).

COROLARIO 8.1: Si llamamos <u>equivalentes</u> a dos familias $(a_i),(b_j)$ cuando: $K(a_i) = K(b_j)$, se tiene: Dos familias de vectores son equivalentes si y solo si cada vector de una es combinación lineal de los vectores de la otra.

TEOREMA 9: La clausura lineal $K(a_1,\dots, a_p)$ es el menor subespacio vectorial que contiene a la familia $(a_1,\dots, a_p)$.

Demostración: Se propone como Ejercicio.

Los conceptos del presente párrafo se pueden ampliar al caso de una familia (a_i) cualquiera, finita ó no. Parece natural comenzar por la siguiente

DEFINICION 16: Llamamos <u>clausura lineal</u> de una familia (a_i) al menor subespacio vectorial que la contiene.

TEOREMA 10: Dicha clausura lineal es la intersección del conjunto de los subespacios que contienen a la familia (a_i).

Demostración: Se propone como Ejercicio.

TEOREMA 11: La clausura lineal de la familia (a_i) es el conjunto S de las combinaciones lineales de cada subfamilia finita de (a_i).

$a = t_1a_1+\ldots+ t_na_n$, es única; es decir , a determina unívocamente los coeficientes de su expresión como combinación lineal de los a_i.

DEFINICION 5: Dada una base $(a_1,\ldots, a_n)$ de V, la aplicación $g: V \longrightarrow K^n$, dada por: $g(a) = (t_1,\ldots, t_n)$, donde $a = t_1a_1+\ldots+ t_na_n$, se llama sistema coordenado de V definido por la base (a_i) , y g(a) se dice n-tupla coordenada de a en dicho sistema. El número t_i se dice coordenada i-sima de a.

EJERCICIO:

5. Comprobar que un sistema coordenado es un isomorfismo.

TEOREMA 2: Los vectores $a_1,\ldots, a_m$ $(a_1 \neq \bar{0})$ son dependientes si y solo si alguno de ellos es combinación lineal de los que le preceden.

Demostración: Sea $t_1a_1+\ldots+ t_ma_m= \bar{0}$; si son dependientes existe una igualdad como la anterior tal que algún $t_i \neq 0$; de estos t_i no nulos tomemos el de mayor subíndice:
$k = \text{máx}\{i \mid t_i \neq 0\}$.

Entonces: $t_1a_1+\ldots+ t_ka_k = \bar{0}$ y $t_k \neq 0$.

Multiplicando por t_k^{-1} se tiene:

$$t_k^{-1}t_1a_1+\ldots+ a_k = \bar{0} ,$$

luego podemos expresar a_k como combinación lineal de los a_i cuyo $i < k$.

Si el único $t_i \neq 0$ es t_1 entonces: $t_1a_1 = \bar{0}$, lo cual implica: $a_1 = \bar{0}$, que contradice la hipótesis.

Recíprocamente: Si existe un a_k tal que
$a_k = t_1a_1+\ldots+ t_{k-1}a_{k-1}$, se tiene: $t_1a_1+\ldots+ t_{k-1}a_{k-1} - a_k= \bar{0}$ y como $-1 \neq 0$, los vectores son dependientes. <>

Con análoga demostración se tendría el teorema que resulta de sustituir la hipótesis $a_1\neq \bar{0}$ por $a_m\neq \bar{0}$, y la palabra "preceden" por "siguen".

COROLARIO 2.1: Los vectores $a_1,\ldots,a_m$ son dependientes si y solo si existe un subconjunto propio de ellos que engendra el mismo subespacio vectorial que todos(v. pg.57, Corol.8.1)

COROLARIO 2.2: Un conjunto finito F de vectores contiene un subconjunto libre que engendra el mismo espacio que F.

Demostración: Si F es libre ya está demostrado y si es ligado, hay un vector dependiente de los demás, que se suprime; si el conjunto que queda es libre ya está demostrado el Corolario y en caso contrario se vuelve a suprimir un vector; así siguiendo, por ser F finito, se llega a obtener un subconjunto libre que engendra el mismo espacio que F. <>

COROLARIO 2.3: Si un espacio vectorial es de tipo finito, posee una base finita.

COROLARIO 2.4: Si la familia $(a_1,\dots,a_m)$ es libre y la $(a_1,\dots, a_m, b)$ es ligada, el vector $\underline{b}$ es combinación lineal de los (a_i). Pues en esta última hay un vector combinación lineal de los precedentes, que no puede ser un a_j por ser los a_i independientes.

TEOREMA 3: Si $\underline{n}$ vectores $a_1,\dots,a_n$ forman un sistema generador del espacio vectorial V, y V contiene $\underline{r}$ vectores independientes, entonces: $r \leq n$.

Demostración: Sean $b_1,\dots,b_r$ vectores independientes; el conjunto $(b_1,a_1,\dots,a_n)$ es un sistema generador de V. Pero como b_1 es combinación lineal de los a_i, este sistema es ligado y por el Teorema 2 existe un vector combinación lineal de los precedentes, que no es b_1 pues $b_1 \neq \bar{0}$; sea dicho vector a_i; suprimiéndole obtenemos otro sistema generador $(b_1,a_1,\dots,a_{i-1}, a_{i+1},\dots,a_n)$.

Tambien será sistema generador:

$(b_2,b_1,a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_n)$ que a su vez es ligado; volviendo a aplicar el Teorema 2 podemos suprimir otro vector a_j.

Repitiendo este proceso resulta que, si fuese $r > n$, el sistema $(b_n,\dots,b_1)$ sería generador, y el $(b_{n+1},b_n,\dots,b_1)$ sería ligado, contra la hipótesis. <>

COROLARIO 3.1: En un espacio vectorial V de tipo finito, todas las bases tienen el mismo número n de elementos. Dicho número n se llama rango (ó dimensión) de V.

Demostración: Dadas dos bases $(a_1,\dots,a_n)$ y $(b_1,\dots,b_m)$, como los vectores a_i son independientes y los b_j generadores, por el Teorema 3 se tiene $n \leq m$; pero por otro lado los b_j son independientes y los a_i generadores luegó $m \leq n$; se concluye: $m = n$. <>

COROLARIO 3.2: Sea V un espacio de rango finito n, y F una familia de m vectores; entonces, si $m > n$ F es ligada, y si $m < n$ F no es generadora.

COROLARIO 3.3: En un espacio de tipo finito, sea $(a_1,\dots,a_n)$ una base y $(b_1,\dots,b_r)$ un sistema libre; entonces, se pueden sustituir r vectores a_i por los b_j de modo que la familia $(b_1,\dots,b_r,a_{i1},\dots,a_{i,n-r})$ sea base.

Este resultado se conoce con el nombre de Teorema del Cambio.

De acuerdo con la nomenclatura usada en conjuntos ordenados, un sistema libre maximal es un sistema que no es subconjunto propio de otro sistema libre. Del Corolario 3.2 deducimos que una base es sistema libre maximal. Recíprocamente,

TEOREMA 4: Sea V un espacio vectorial que posee un sistema F libre maximal finito; entonces, F es base de V.

Demostración: Es inmediata, apoyándose en el Corolario 2.4.

COROLARIO 4.1: Si un espacio V es de tipo finito, cualquier subespacio S de V tambien lo es, y dim S $\leq$ dim V.

Demostración: Se propone como Ejercicio.

TEOREMA 5: Sea V un espacio de dimensión n. Entonces, un sistema F de n vectores es base si y solo si se cumple cualquiera de estas condiciones: 1^a) F es libre, 2^a) F es generador.

Demostración: 1^a) F es libre maximal, luego base.

2^a) F no puede ser ligada, ya que entonces (por Corolario 2.1) existiría un sistema generador de V, de $n-1$ vectores, lo cual es imposible (v. Corolario 3.2). <>

NOTA IMPORTANTE: El subespacio nulo $\{\bar{0}\}$, a pesar de ser de tipo finito, no posee base alguna, ya que el sistema $(\bar{0})$ es ligado. Pero se admite que: $\dim \{\bar{0}\} = 0$, por razones que se verán más adelante.

EJERCICIOS:

6. Demostrar que un sistema de vectores es base, si y solo si es generador minimal.
7. Probar que dos sistemas equivalentes del mismo número de vectores, son simultáneamente libres ó ligados.
8. Demostrar que: $\dim(V\times W) = \dim V + \dim W$.
9. Probar que dos espacios V y W de la misma dimensión n son isomorfos.(Recordar que cada uno es isomorfo a K^n).

DEFINICION 6: Se llama rango de un sistema $(a_1,\dots,a_m)$ al rango de la clausura $K(a_1,\dots,a_m)$, es decir, al máximo número de vectores independientes que contiene.

EJERCICIOS:

10. Sean a y b dos vectores de una familia finita F, y sea F' la familia que resulta de F sustituyendo a por: a + tb. Demostrar que: rang F'= rang F.
11. Sea $(a_1,\dots,a_n)$ un sistema libre, y $t_1,\dots,t_m$ escalares distintos de cero. Probar que entonces, el sistema: $(t_1a_1+ s_1^2a_2+\dots+ s_1^na_n,\ t_2a_2+ s_2^3a_3+\dots+ s_2^na_n ,\dots,$ $t_ma_m+ s_m^{m+1}a_{m+1}+\dots+ s_m^na_n\ )$ es tambien libre.
12. Apoyándose en los Ejercicios 10 y 11, calcular el rango de sistemas dados de vectores de Q^n.

2.DIMENSIONES DE SUBESPACIOS.

Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Por su importancia, repetimos aquí, mejorado, el siguiente resultado:

TEOREMA 6: Si S es subespacio de V, $\dim S \leq \dim V$, y si se cumple el signo = , se tiene: S = V.

Demostración: La primara parte es el Corolario 4.1 precedente. La segunda se sigue de que toda base de S lo es de V, por ser un sistema libre de $\underline{n}$ vectores (v. Teorema 5). <>

COROLARIO 6.1: rang $(a_1,\ldots, a_m)$ = rang $(a_1,\ldots,a_m, b)$ $\Leftrightarrow K(a_1,\ldots,a_m) = K(a_1,\ldots,a_m,b) \Leftrightarrow \underline{b}$ es combinación lineal de los (a_i).

Demostración: Se propone como Ejercicio.

TEOREMA 7: Si partimos una base de V en dos partes $B = (a_1,\ldots,a_r)$ y $B' = (a_{r+1},\ldots,a_n)$, se tiene: Los subespacios $S = K(B)$ y $T = K(B')$ son suplementarios.

Demostración: Es claro que $S + T = V$, ya que: $S + T \supset (B,B') = (a_1,\ldots,a_n)$ base de V. En cuanto a la intersección, notemos que: $a \in S \cap T \Rightarrow a = t_1a_1+\ldots+ t_ra_r = t_{r+1}a_{r+1} +\ldots+ t_na_n \Rightarrow t_1a_1+\ldots+t_ra_r- t_{r+1}a_{r+1} -\ldots- t_na_n= \bar{0}$ $\Rightarrow$(por ser los a_i independientes) $\forall\, t_i = 0 \Rightarrow a = \bar{0}$; se concluye: $S\cap T = \bar{0}$. <>

TEOREMA 8: Todo subespacio S de V, posee un suplementario.

Demostración: Si es B una base de S, de acuerdo con el Corolario 3.3, existe un sistema B' libre tal que (B,B') es base de V. Luego según el Teorema precedente, $S = K(B)$ y $T = K(B')$ son suplementarios. <>

TEOREMA 9: Si S y T son dos subespacios vectoriales de V se tiene: $\dim S + \dim T = \dim (S + T) + \dim (S \cap T)$.

Demostración: Como $S \cap T$ es un subespacio vectorial, posee una base; sea esta $(c_1,\ldots,c_n)$.

Pero siendo $S \cap T$ subespacio de S, existen p vectores $a_1,\ldots,a_p$ tales que $(c_1,\ldots,c_n,a_1,\ldots,a_p)$ es base de S. Analogamente, existen q vectores $b_1,\ldots,b_q$ tales que $(c_1,\ldots,c_n,b_1,\ldots,b_q)$ es base de T.

Vamos a demostrar que $(c_1,\ldots,c_n,a_1,\ldots,a_p,b_1,\ldots,b_q)$ es una base de S+T. Evidentemente es un sistema generador de este subespacio; nos queda por comprobar que es libre.

Supongamos que existe la relación:

$$t_1c_1+\ldots+ t_nc_n+ s_1a_1+\ldots+ s_pa_p+ r_1b_1+\ldots+ r_qb_q = \bar{0}$$

entonces:

$$r_1b_1+\ldots+ r_qb_q = -t_1c_1-\ldots- t_nc_n- s_1a_1-\ldots- s_pa_p \quad ;$$

el segundo miembro es pues un vector de S y el primero de T, lo cual indica que $r_1b_1+\ldots+ r_qb_q$ es un vector de $S \cap T$ y por tanto:

$$r_1b_1+\ldots+ r_qb_q = h_1c_1+\ldots+ h_nc_n$$

pero como el conjunto de los (b_i) y los (c_j) es libre, se tiene: $r_1=\ldots= r_q = 0$. Análogamente obtendríamos: $s_1=\ldots= s_p = 0$, y por tanto se tiene:

$$t_1c_1+\ldots+ t_nc_n = \bar{0}$$

pero como los (c_j) son independientes, se sigue: $t_1=\ldots= t_n = 0$; queda pues probado que el sistema (a_k,b_i,c_j) es base. Tenemos:

$$\dim (S \cap T) = n \quad , \quad \dim S = n + p$$

$$\dim (S + T) = n + p + q \quad , \quad \dim T = n + q$$

luego el teorema está demostrado. <>

<u>Notemos</u> que si $S \cap T = \bar{0}$, el conjunto (c_j) es vacío, y se llega a: $\dim S + \dim T = \dim (S + T)$. Por ello, para que la igualdad del Teorema 9 sea tambien válida en este caso, es preciso hacer el <u>convenio</u>: $\dim \{0\} = 0$, que ya se indicó.

× COROLARIO 9.1: La suma S+T de dos subespacios, es directa si y solo si: $\dim S + \dim T = \dim (S+T)$.

× TEOREMA 10: Sea $(a'_1,\ldots,a'_p)$ una base del espacio cociente V/S , y $(a_1,\ldots,a_p)$ un sistema de vectores de V tales que: $a'_i = [a_i]$ $(i = 1,\ldots,p)$. Entonces, este sistema es una base de un subespacio T suplementario de S.

Demostración: $t_1a_1+\ldots+ t_pa_p \in S \Rightarrow t_1a_1+\ldots+t_pa_p + S= S$ $\Leftrightarrow$ (v. pg.53, Def.6) $t_1a'_1 +\ldots+ t_pa'_p = [0_V] \Rightarrow$ (por ser los a'_i independientes) $t_1=\ldots= t_p= 0$. Se sigue: 1º) el sistema $(a_1,\ldots,a_p)$ es libre, puesto que: $t_1a_1+\ldots+ t_pa_p= \theta_V \Rightarrow$ $t_1=\ldots= t_p= 0$; 2º) $T = K(a_1,\ldots,a_p)$ es tal que: $T \cap S = 0_V$; 3º) $T + S = V$, ya que: $(\forall a \in V)\ a \in [a]= t_1a'_1+\ldots+ t_pa'_p =$ $= t_1a_1+\ldots+ t_pa_p + S \subset T + S$. <>

COROLARIO 10.1: dim V/S = dim V − dim S.

$\dim V = \dim (S \oplus T) = \dim (S+T) = \dim \ldots \dim V = \dim$

EJERCICIO:

$\dim V = \dim S + \dim V/S$; $\dim V/S = \dim V - \dim S$.

13: Dados subespacios S y T, determinar bases de S, T, $S \cap T$ y $S + T$.

14. Sean B y B' respectivamente, sendas bases de dos subespacios suplementarios. Demostrar que (B,B') es base de V.

3. CAMBIO DE COORDENADAS.

Sean $(a_1,\ldots,a_n)$ y $(b_1,\ldots,b_n)$ dos bases de V, y $\underline{a}$ un vector cualquiera. Escribamos:

$$a = x^1a_1+\ldots+ x^na_n = y^1b_1+\ldots+ y^nb_n \; .$$

Es decir, designamos con (x^i) las coordenadas de $\underline{a}$ en el sistema coordenado de base (a_i) (diremos tambien, en la base (a_i)), y con (y^j) en la base (b_j).

El indicarlas con superíndices en vez de con subíndices, mejora la claridad de la mayoría de las fórmulas y cálculos en que entran, y ayuda a su retentiva, como veremos en lo que sigue.

Pues bien, interesa muchas veces, expresar las coordenadas (y^j) en función de las (x^i), ó viceversa. Ello puede hacerse, si conocemos las coordenadas de los vectores de una base respecto de la otra. Por ejemplo, sea:

$$b_j = t_j^1a_1 +\ldots+ t_j^na_n \quad (j = 1,\ldots,n).$$

Entonces se tiene:

$$x^1a_1+\ldots+ x^na_n = y^1(t_1^1a_1+\ldots+ t_1^na_n)+\ldots+ y^n(t_n^1a_1+\ldots+ t_n^na_n) =$$
$$= (y^1t_1^1+\ldots+ y^nt_n^1)a_1+\ldots+(y^1t_1^n+\ldots+ y^nt_n^n)a_n \; ,$$

y por ser los (a_i) independientes, se deduce:

$$x^1 = y^1t_1^1+\ldots+ y^nt_n^1 \; , \; \ldots \; , \; x^n = y^1t_1^n+\ldots+ y^nt_n^n \; , \text{ ó sea:}$$

$$x^i = y^1t_1^i+\ldots+ y^nt_n^i \quad (i = 1,\ldots,n) \qquad (1).$$

Las $\underline{n}$ igualdades (1) expresan las x^i en función de las y^j. Notemos que los coeficientes de la expresión de x^i son las coordenadas i-simas de $b_1,\ldots,b_n$ en la base (a_i).

Analogamente, si se tiene:

$$a_i = s_i^1b_1+\ldots+ s_i^nb_n \quad (i = 1,\ldots,n)$$

se llega a: $y^j = x^1 s_1^j + \ldots + x^n s_n^j$ $(j = 1,\ldots,n)$ (2).

EJERCICIO:

15. Escribir las ecuaciones (1) y (2) en el caso de $V = Q^n$, (a_i) = base natural, y (b_j) = base dada.

LECCION 12

1. APLICACION LINEAL. PRIMERAS PROPIEDADES.

Ya se dió en la Lección 10 (pg.54, Def.7), la definición de homomorfismo de espacios vectoriales, concepto que se designa más corrientemente con el nombre de aplicación lineal.

EJEMPLOS:

1. La aplicación $f: K \to K$, dada por: $f(x) = 5x$.
2. La aplibación $f: K^2 \to K^3$ dada por: $f(x_1,x_2) = (x_1+2x_2,\ 3x_1+x_2,\ 2x_1-x_2)$.
3. La aplicación $f: K[x] \to K[x]$ dada por: $f(P) = P'$ derivada de P.
4. La aplicación $p_1: V \times V \to V$, dada por: $p_1(a_1, a_2) = a_1$.

EJERCICIOS:

1. Comprobar que la aplicación canónica $p: V \to V/S$, de un V en un espacio cociente, es lineal.(Recordar: $p(a) = a + S$).

1! Sean U, V, W tres espacios vectoriales, y $f: U \to V$, $g: V \to W$, sendas aplicaciones lineales. Demostrar que el producto $g.f: U \to W$, es lineal.

Consecuencias de la definición.

Sea una aplicación lineal $f: V \to W$.

1°) f posee todas las propiedades que se deducen de ser un caso particular de homomorfismo del grupo abeliano (V,+) en el (W,+). Por ejemplo: $f(0_V) = 0_W$; $f(-a) = -fa$.

2°) Si el sistema $(a_1,\ldots,a_m)$ es ligado, tambien lo es el $(fa_1,\ldots,fa_m)$. Pues la igualdad: $t_1a_1+\ldots+t_ma_m = 0_V$ con un $t_j \neq 0$, implica: $f(t_1a_1+\ldots+t_ma_m) = t_1(fa_1)+\ldots+t_m(fa_m) = 0_W$

con el mismo $t_j \neq 0$.

3°) Si el sistema $(fa_1, \ldots, fa_m)$ es libre, tambien lo es el $(a_1, \ldots, a_m)$. Pues esta aserción equivale lógicamente a la anterior.

Determinación y existencia.

TEOREMA 1: Si $(a_1, \ldots, a_m)$ es un sistema generador de V, y $(c_1, \ldots, c_m)$ un sistema de m vectores de W, existe a lo más una aplicación lineal $f: V \longrightarrow W$, tal que: $fa_i = c_i$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Demostración: En efecto, si existe tal f, y a es un vector cualquiera de V, se tiene: $a = t_1 a_1 + \ldots + t_m a_m$, luego: $fa = t_1(fa_1) + \ldots + t_m(fa_m)$ está univocamente determinado por las condiciones prefijadas. Es decir, si existe tal f, es única.

TEOREMA 2: Si $(a_1, \ldots, a_n)$ es una base de V, y $(c_1, \ldots, c_n)$ un sistema de n vectores de W, existe una y solo una aplicación lineal $f: V \longrightarrow W$, tal que: $fa_i = c_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Demostración: Si existe es única según el Teorema anterior.

Para probar que existe una, consideremos un vector a cualquiera de V; se tiene: $a = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n$, y a determina univocamente la n-tupla $(x_1, \ldots, x_n)$; por tanto, si escribimos: $fa = x_1 c_1 + \ldots + x_n c_n$, f es una aplicación que cumple: $fa_i = c_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, y además es lineal, como se comprueba fácilmente. <>

Expresión coordenada.

Sea f una aplicación lineal de V en W, $(a_1, \ldots, a_n)$ una base de V y $(b_1, \ldots, b_m)$ una base de W. Un vector a de V tiene coordenadas (x^i) en la base (a_i), y sean (y^j) las coordenadas de fa en la base (b_j). Se trata de expresar las y^j en función de las x^i.

Para ello, notemos que según el Teorema precedente, f queda determinada dando los vectores fa_i $(i = 1, \ldots, n)$. Sea dado cada fa_i por sus coordenadas en la base (b_j); se tiene entonces:

$$fa_i = t_i^1 b_1 + \ldots + t_i^m b_m \quad (i = 1, \ldots, n)$$

luego: $fa = f(x^1a_1+\ldots+x^na_n) = x^1(fa_1)+\ldots+x^n(fa_n) =$
$= x^1(t_1^1b_1+\ldots+t_1^mb_m)+\ldots+x^n(t_n^1b_1+\ldots+t_n^mb_m)$;
pero: $fa = y^1b_1+\ldots+y^mb_m$, y se concluye:

$$\begin{matrix} y^1 = x^1t_1^1+\ldots+x^nt_n^1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^m = x^1t_1^m+\ldots+x^nt_n^m \end{matrix} \qquad \text{(I).}$$

El cuadro formado por los escalares t_i^j se llama <u>matriz coordenada</u> de f respecto del par de bases (a_i) (b_j); la representaremos por: $M(f, a_i, b_j)$. El sistema de ecuaciones (I) se dice <u>expresión coordenada</u> de f en las coordenadas (x) (y), ó tambien: <u>ecuaciones</u> de f en las (x) (y).

2.IMAGENES Y ANTIIMAGENES EN UNA APLICACION LINEAL.

Sea una aplicación lineal $f: V \longrightarrow W$.

TEOREMA 3: <u>Si S es subespacio de V, f(S) es subespacio de W.</u>

Demostración: Sean <u>b</u>, <u>b</u>' dos vectores de f(S); por definición de f(S), existen vectores <u>a</u>, <u>a</u>' de S tales que: $fa = b$, $fa' = b'$. Ahora bien, como f es lineal, se tiene:

$(\forall\, t,s \in K)\ \ tb + sb' = t(fa)+ s(fa') = f(ta + sa') \in f(S)$,
luego f(S) es subespacio de W. <>

DEFINICION 1: Se llama <u>rango</u> de la aplicación lineal f, y se escribe: rang f, a la dimensión de $\operatorname{Im} f = f(V)$.

<u>Consecuencia</u>: f es supráyectiva <=> rang f = dim W (v. pg.63, Teor.6).

TEOREMA 4: Si $(a_1,\ldots,a_m)$ es una familia de vectores de V, se tiene: <u>$f(K(a_1,\ldots,a_m)) = K(fa_1,\ldots,fa_m)$.</u>

Demostración: <u>Como $f(t_1a_1+\ldots+t_ma_m) = t_1(fa_1)+\ldots+t_m(fa_m)$ se ve que todo vector del primer miembro lo es del segundo, y viceversa.</u> <>

COROLARIO 4.1: <u>Si $(a_1,\ldots,a_n)$ es base de V, se tiene: rang f = rang $(fa_1,\ldots,fa_n)$.</u>

Este Teorema es tambien válido para una familia no finita, como se comprueba recordando la definición de clausura lineal de una familia arbitraria.

Notemos que el Teorema 3 es Corolario del 4, ya que: $K(S)= S$, luego $f(S)= K(f(S))$ que es subespacio.

TEOREMA 5: Si T es un subespacio de W, $f^{-1}(T)$ es subespacio de V.

Demostración: Sean a, a' dos vectores de $f^{-1}(T)$; por definición de $f^{-1}(T)$ existen vectores b, b' de T, tales que: $fa = b$, $fa' = b'$. Pero como f es lineal, se sigue:

$(\forall\, t,s \in K)\ \ f(ta + sa')= t(fa) + s(fa')= tb + sb' \in T$

por ser T subespacio, luego: $ta + sa' \in f^{-1}(T)$, lo que prueba la tesis. <>

Ya hicimos notar que la aplicación lineal f es homomorfismo del grupo abeliano $(V,+)$ en el $(W,+)$.

DEFINICION 2: Se llama núcleo de f a su núcleo N como homomorfismo de grupos abelianos, y se escribe asimismo: Ker f. Como $N = f^{-1}(0_W)$, se sigue que es un subespacio de V.

Consecuencias (v. pg.32, Teor.8):

1°) El conjunto de los vectores de V que tienen la misma imagen fa que uno a dado, es: $[a] = f^{-1}(fa) = a + \text{Ker } f$.

2°) La aplicación f es inyectiva si y solo si: $\text{Ker } f = 0_V$.

TEOREMA 6: El nucleo Ker f es 0_V <=> todo sistema libre de V tiene por imagen un sistema libre de W.

Demostración: =>) Si $\text{Ker } f = N = 0_V$ y $(a_1,\dots,a_m)$ es libre, sea: $t_1(fa_1)+\dots+ t_m(fa_m) = 0_W$. Se sigue:

$f(t_1a_1+\dots+ t_ma_m) = 0_W$, luego: $t_1a_1+\dots+ t_ma_m = 0_V$ (por ser $N = 0_V$). Pero siendo $(a_1,\dots,a_m)$ libre, se concluye: $t_i = 0$ $(i = 1,\dots,m)$ lo cual prueba que $(fa_1,\dots,fa_m)$ es libre.

<=) Todo vector a no nulo de V, constituye un sistema libre (pues entonces, $ta = 0_V \Rightarrow t = 0$), luego por hipótesis $[fa]$ es libre, o sea: $fa \neq 0_W$, lo cual prueba que: $f^{-1}(0_W)=N = 0_V$.<>

COROLARIO 6.1: La aplicación f es inyectiva, si y solo si: dim V = dim f(V). Pues entonces, una base de V tendrá como imagen una base de f(V) (v. Teorema 4 anterior).

COROLARIO 6.2: La aplicación f es isomorfismo si y solo si: dim V = dim W y Ker f = 0_V .

Descomposición canónica.

TEOREMA 7: En la descomposición canónica: $f = i.\bar{f}.p$, la aplicación $\bar{f}$: V/N ⟶ f(V) es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración: Ya está probado que $\bar{f}$ es isomorfismo del grupo (V/N,+) sobre el (f(V),+) (v. pg.32, Teor.8). Pero además se tiene: $\bar{f}(t[a]) = \bar{f}(ta + N) = f(ta) = t(fa) = t(\bar{f}[a])$, luego $\bar{f}$ es aplicación lineal, y siendo biyectiva, es isomorfismo. <>

Recordando que p: V ⟶ V/N es aplicación lineal (v. Ejercicio 1 anterior) y que i: f(V) ⟶ W tambien lo es, resulta que en la descomposición canónica de f, los tres factores son aplicaciones lineales.

COROLARIO 7.1: rang f = dim V - dim Ker f.

El Teorema 7 es conocido como Teorema de isomorfia de espacios vectoriales.

EJERCICIOS:

2. Probar que si T es subespacio suplementario de S, la aplicación g: T ⟶ V/S , dada por: g(a) = a + S, es un isomorfismo.
3. Sea f: V ⟶ W una aplicación lineal y S un subespacio de V. Comprobar que la restricción f_1 de f a S es lineal, y que su núcleo es: Ker f_1 = S ∩ Ker f. De ahí, probar que: dim f(S) = dim S - dim (S ∩ N).
4. Si f es un endomorfismo de V, demostrar que el conjunto [a ∈ V ∤ fa = a] es un subespacio.
5. Sea f un endomorfismo de V, que es proyección (f.f = f).

Demostrar que entonces, Im f y Ker f son suplementarios.

6. Sea $f: V \longrightarrow W$ aplicación lineal tal que: dim V = dim W. Probar que en esta caso, f inyectiva $\Leftrightarrow$ f suprayectiva.

3. ECUACIONES LINEALES.

Sea dado un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{matrix} t_1^1 x^1 + \ldots + t_n^1 x^n = b^1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ t_1^m x^1 + \ldots + t_n^m x^n = b^m \end{matrix} \qquad (1).$$

Considerando una n-tupla $x = (x^1, \ldots, x^n)$ como vector del espacio vectorial K^n, y una $y = (y^1, \ldots, y^m)$ como vector del K^m, sabemos que si en el sistema anterior se sustituye b^j por y^j, la aplicación $f: K^n \longrightarrow K^m$ definida por el sistema, es lineal.

Por lo tanto, una solución del sistema (1) es sencillamente, una antiimagen del vector $(b^1, \ldots, b^m)$ en la aplicación f.

La obtención de las soluciones de (1) es pues un caso particular del siguiente.

"Dada una aplicación lineal de V en W, y un vector <u>b</u> de W, determinar qué vectores de V son antiimagenes de <u>b</u> por f, es decir, determinar $f^{-1}(b)$". Con lenguaje de ecuaciones, hallar las <u>soluciones</u> de la ecuación:

$$f(x) = b \qquad (x \in V)$$

que se dice <u>ecuación lineal</u>.

La respuesta es inmediata conociendo el párrafo anterior; distinguiremos tres casos:

1°) $b = 0_W$. Las soluciones son los vectores de Ker f.

2°) $b \notin$ Im f. No hay solución alguna.

3°) $b \in$ Im f. Existe al menos una solución x_0, y el conjunto de las soluciones es: $x_0 +$ Ker f.

EJERCICIOS:

7. Hallar núcleo e imagen de aplicaciones lineales dadas, de Q^n en Q^m

8. Como aplicación del Ejercicio precedente, resolver sistemas de ecuaciones lineales ordinarias.

4. CONJUNTO DE LAS APLICACIONES LINEALES DE UN ESPACIO EN OTRO, O DE UN ESPACIO EN SI.

Sean V,W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K, y Hom(V,W) el conjunto de las aplicaciones lineales de V en W.

TEOREMA 8: Dados dos elementos f,g de Hom(V,W) se tiene:

1°) La aplicación h: $V \longrightarrow W$ dada por: $h(a) = fa + ga$, es lineal. Se escribe: $h = f + g$.

2°) La aplicación j: $V \longrightarrow W$ dada por: $j(a) = t_1(fa)$ (t_1 escalar fijo), es lineal. Se indica: $j = t_1.f$.

Demostración:

1°) $h(ta + sb) = f(ta + sb) + g(ta + sb) =$
$= t(fa) + s(fb) + t(ga) + s(gb) = t(fa + ga) + s(fb + gb) =$
$t(ha) + s(hb)$.

2°) $j(ta + sb) = t_1[f(ta + sb)] = t_1[t(fa) + s(fb)] =$
$= t_1t(fa) + t_1s(fb) = tt_1(fa) + st_1(fb) = t(ja) + s(jb)$. <>

COROLARIO 8.1: La ley: $(f,g) \longrightarrow f + g$, define una operación interna (+) en Hom ; y la ley: $(t,f) \longrightarrow t.f$, define una externa (.) sobre Hom con dominio K de operadores.

TEOREMA 9: El conjunto Hom(V,W) dotado de las operaciones (+) y (.) precedentes, es un espacio vectorial sobre K.

Demostración: Primero probemos que Hom es grupo abeliano. En efecto, se tiene:

1°) (+) es asociativa, por serlo la operación suma en W. Es decir, $f + (g+g') = (f+g) + g'$, ya que: $fa + (ga + g'a) =$
$= (fa + ga) + g'a$.

2°) (+) es commutativa, por serlo la suma en W.

3°) (+) tiene elemento neutro: el homomorfismo $h_o: V \to W$ dado por: $(\forall a \in V)\ h_oa = 0_W$. Se llama <u>homomorfismo nulo</u>.

4°) Cualquier $f \in$ Hom posee simétrico $\underline{-f}$: es la aplicación de V en W dada por: $(\forall a \in V)\ a \longrightarrow -fa$.

Ahora probemos que (Hom, +, .) es espacio vectorial sobre K. Basta comprobar que se cumplen los axiomas 1,2,3,4 de espacio vectorial (v. pg.51, Def.4): Se propone como Ejercicio. <>

EJERCICIO:

9. Considerando a K como espacio vectorial, una aplicación lineal de V en K, se llama <u>forma lineal sobre V</u>, y el espacio vectorial Hom(V,K) se llama <u>espacio dual de V</u> ; se indica con V*.

   Demostrar que si $(a_1,\dots,a_n)$ es una base de V, la aplicación de V* en K^n dada por: $f \longmapsto (fa_1,\dots,fa_n)$, es un isomorfismo.

Estudiemos ahora el caso particular Hom(V,V), es decir, el conjunto de los endomorfismos de V, que se suele designar <u>End(V)</u>. Además de las operaciones (+) interna y (.) externa anteriores, es de considerar en End(V) una tercera operación: el producto de aplicaciones, que es evidentemente operación binaria interna en dicho conjunto (v. pg.67, Ejercicio 1'); la designaremos con *.

TEOREMA 10: La estructura (End, +, *) es un anillo con unidad 1_V.

Demostración: Se propone como Ejercicio.

Sabemos que una aplicación es biyectiva si posee inversa, ó sea, si es inversible respecto de *. Se deduce que los elementos inversibles de End(V) son los automorfismos de V. Recordando que los elementos inversibles de un anillo forman grupo pará el producto (v. pg.40, Ejercicio 2), se tiene:

DEFINICION 3: Los automorfismos de un espacio vectorial V forman grupo con la operación producto de aplicaciones, el cual recibe el nombre de <u>grupo lineal de V</u>, y se indica: GL(V).

Consideremos ahora la estructura (End, +, ., *). Sabemos de ella que (End,+,.) es espacio vectorial sobre K, y que (End,+,*) es anillo. Pero hay algo más: las operaciones (.) y

(*) están ligadas por la propiedad siguiente:

$(\forall f,g \in End)(\forall t \in K) \quad t(f*g) = tf*g = f*tg$.

Esta estructura constituye el ejemplo más interesante del caso general siguiente.

DEFINICION 4: Un <u>algebra asociativa</u> sobre un cuerpo K, es una estructura (E, +, ., *) tal que (E,+,.) es un espacio vectorial sobre K, (E,+,*) es un anillo, y se cumple:

$(\forall a,b \in E)(\forall t \in K) \quad t(a*b) = ta*b = a*tb$.

Cuando se dice <u>algebra</u> sobre K, se entiende asociativa.

Dos álgebras son estructuras análogas, si son ambas sobre el mismo K. Tiene portanto sentido, el siguiente concepto.

DEFINICION 5: Se llama <u>homomorfismo</u> de un algebra en otra, a una aplicación que es a la vez homomorfismo de espacios vectoriales y de anillos.

EJERCICIOS:

10. Comprobar que los números complejos constituyen un algebra sobre el cuerpo real.
11. Sea (E,+,.,*) un algebra y <u>a</u> un elemento de E. Probar que:
    1°) La aplicación $f_a: E \longrightarrow E$ dada por: $f_a(x) = a*x$, es un endomorfismo de (E,+,.).
    2°) La aplicación definida mediante: $a \longmapsto f_a$, es un homomorfismo de algebras: $E \longrightarrow End(E,+,.)$.

LECCION 13

1. MATRICES SOBRE UN CUERPO.

DEFINICION 1: Una matriz $n\times m$ sobre un cuerpo K, es un cuadro de elementos de K, formado por n filas y m columnas:

$$A = [a_i^j] = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^m \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^m \end{pmatrix} .$$

Aunque está implícito en la definición, no parece superfluo advertir que es esencial el lugar que ocupa cada elemento, es decir, que dos matrices $n\times m$ solo son iguales, si tienen en cada lugar (i,j) el mismo número.

Una matriz $1\times m$ se dice matriz fila, y una $n\times 1$ se llama matriz columna. Una $n\times n$ se dice matriz cuadrada de orden n.

La diagonal principal de una matriz es la sucesión formada por los elementos a_i^i . Una matriz se dice triangular superior si tiene nulos los elementos situados por debajo de la diagonal principal; triangular inferior si son nulos los situados encima; y diagonal si son nulos los situados encima y debajo, es decir, los situados fuera de dicha diagonal principal.

Dada una matriz A, sean $i_1,\dots,i_p$ indices de fila y $j_1,\dots,j_q$ indices de columna. Entonces, la matriz $p\times q$ cuyas filas son $(a_i^{j_1},\dots,a_i^{j_q})$ $(i = i_1,\dots,i_p)$ se dice submatriz de A. Se obtiene tambien, suprimiendo en A las filas y las columnas de indices distintos de los mencionados.

Una submatriz cuyos indices de filas sean consecutivos y asimismo los de columnas, se llama bloque ó caja de la matriz A. Los bloques más notables son los bloques fila A_i , submatrices formadas por una fila, y los bloques columna A^j. La expresión de A mediante ellos, es:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = [A^1,\dots,A^m] .$$

Una matriz fila $1\times m$ es en realidad una m-tupla, y por ello, un vector de K^m. Los nombres con que se designe pueden considerarse sinónimos, y se usarán según convenga. Así, un bloque fila se dice tambien un <u>vector fila</u>, y un bloque columna se dice tambien un <u>vector columna</u>.

Se llama <u>descomposición de A en bloques</u>, a una partición de A en bloques:

$$A = \begin{bmatrix} A_1^1 . & . & . & A_1^k \\ . & . & . & . \\ A_h^1 . & . & . & A_h^k \end{bmatrix}$$

Si en la descomposición anterior, $h = k$, y todos los bloques A_i^j con $i \neq j$ son nulos, la matriz A se dice <u>suma diagonal</u> (ó <u>suma directa</u>) de las matrices A_i^i , y se escribe: $A = [A_1^1,\ldots,A_h^h]$.

DEFINICION 2: Dada una matriz A $n\times m$, la matriz cuyo elemento (j,i) es el (i,j) de A, se llama <u>matriz traspuesta de A</u> y se escribe: <u>A'</u> (ó ${}^tA$). Es decir:

$$A' = \begin{bmatrix} a_1^1 . & . & . & a_n^1 \\ . & . & . & . \\ a_1^m . & . & . & a_n^m \end{bmatrix}$$

Se sigue que: $(A')' = A$.

Si $A' = A$, la matriz A se dice <u>simétrica</u>; ello equivale a: $(\forall\, i,j)\ a_j^i = a_i^j$.

Si para todo (i,j) $a_j^i = -a_i^j$, la matriz A se dice <u>antisimétrica</u> (ó <u>hemisimétrica</u>).

<u>2.SUMA Y PRODUCTO POR UN ESCALAR</u>.

Recordemos que se llama escalar,en general, a un número de K.

DEFINICION 3: Dadas dos matrices $n\times m$, A y B, se llama <u>suma de A y B</u> a la matriz cuyo elemento (i,j) es: $a_i^j + b_i^j$. Se escribe: $A + B$.

<u>Notemos</u> que $(A,B) \longmapsto A + B$ no es operación binaria en

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

en el producto de matrices, que se define en el párrafo siguiente, y que utiliza de manera esencial la distribución de los nm números en n filas.

Volviendo al isomorfismo anterior, se ve que las base natural ó canónica del espacio vectorial $M(n \times m)$ está formada por las matrices que tienen un elemento igual a 1, y los demás nulos. Se suele designar por E_i^j la matriz que tiene $e_i^j = 1$ y todos los demás elementos nulos.

EJERCICIOS:

1. Comprobar que cada uno de los conjuntos siguientes, componen un subespacio vectorial del $M(n \times m)$:
   1°) Matrices triangulares superiores, 2°) Triangulares inferiores, 3°) Diagonales, 4°) Simétricas, 5°) Antisimétricas.
2. Demostrar que los subespacios 4°) y 5°) precedentes, son suplementarios.
3. Probar que las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ componen un espacio vectorial, y hallar una base del mismo.
4. Sean V y W espacios vectoriales sobre K, de dimensiones respectivas n y m. Fijadas sendas bases (a_i) de V y (b_j) de W, comprobar que la aplicación g: $\mathrm{Hom}(V,W) \longrightarrow M(n \times m)$, dada por: $g(f)$ = matriz coordenada $M(f, a_i, b_j)$, es un isomorfismo de espacios vectoriales.

3. PRODUCTO DE MATRICES. PROPIEDADES.

Sean V^p, V^n, V^m, tres espacios vectoriales sobre K, de dimensiones p, n, m, respectivamente, f una aplicación lineal: $V^p \longrightarrow V^n$, y g una aplicación lineal: $V^n \longrightarrow V^m$.

Sean (x), (y), (z) sistemas coordenados respectivos, A la matriz coordenada de f en (x,y), y B la matriz coordenada de g en (y,z).

Las expresiones coordenadas de f y g serán, respectivamente:

$$y^\alpha = x^1 a_1^\alpha + \dots + x^p a_p^\alpha \quad (\alpha = 1,\dots,n) \qquad (1)$$

$$z^j = y^1 b_1^j + \dots + y^n b_n^j \quad (j = 1,\dots,m) \qquad (2).$$

Parece natural estudiar la siguiente cuestión: Calcular la matriz coordenada de g.f en las coordenadas (x,z), conociendo las matrices A y B anteriores.

Evidentemente, la expresión coordenada de g.f en (x,z) se obtiene sustituyendo (2) en (1), y se tiene:

$$z^j = (x^1a_1^1+\ldots+x^pa_p^1)b_1^j+\ldots+(x^1a_1^n+\ldots+x^pa_p^n)b_n^j \quad ;$$

sacando factor común las x^i, resulta:

$$z^j = x^1(a_1^1b_1^j+\ldots+a_1^nb_n^j)+\ldots+x^p(a_p^1b_1^j+\ldots+a_p^nb_n^j) \, .$$

Por tanto, la matriz D buscada tiene por elemento (i,j):

$$d_i^j = a_i^1b_1^j+\ldots+a_i^nb_n^j \qquad (3).$$

La fórmula (3) se expresa diciendo que: el elemento d_i^j de la matriz D, es el producto de la fila i de A por la columna j de B.

DEFINICION 5: Dadas una matriz A p×n , y una B n×m , se llama producto de A por B a la matriz D p×m, cuyo elemento (i,j) viene dado por (3). Se escribe: D = AB .

Notemos que (A,B) --> AB no es operación binaria en el conjunto total de matrices. Para que exista AB, es necesario y suficiente que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B.

La observación es análoga a la que señala que el producto de dos aplicaciones existe solamente cuando el conjunto final de la primera coincide con el inicial de la segunda.

Casos particulares notables.

1°) Matriz fila por matriz columna. Escribamos:

$X' = [x^1,\ldots,x^n]$, $U' = [u_1,\ldots,u_n]$. Se tiene:

$$X'U = [x^1u_1+\ldots+x^nu_n] = \text{matriz } 1\times1.$$

2°) Matriz fila por matriz n×m. Se tiene:

$$X'A = [x^1a_1^1+\ldots+x^na_n^1, \ \ldots \ , x^1a_1^m+\ldots+x^na_n^m] = \text{matriz fila}.$$

3°) Matriz m×n por matriz columna. Se tiene:

$$AU = \begin{pmatrix} a_1^1u_1+\ldots+a_1^nu_n \\ \cdots\cdots \\ a_m^1u_1+\ldots+a_m^nu_n \end{pmatrix} = \text{matriz columna.}$$

TEOREMA 3: La i-sima fila de la matriz AB , es la combinación lineal siguiente de las filas de B: $a_i^1B_1+\ldots+a_i^nB_n$.

Demostración: Se propone como Ejercicio.(Es una simple comprobación).

TEOREMA 3 BIS: La j-sima columna de la matriz AB , es la combinación lineal de las columnas de A: $A^1b_1^j+\ldots+A^nb_n^j$.

Con la notación del producto de matrices, se pueden escribir de forma abreviada los sistemas de ecuaciones lineales. Así, el sistema que expresa el cambio de coordenadas en un espacio vectorial (v. pg.66, fórmula (1)) se escribe: $X' = Y'P$, siendo $P = [t_i^j]$. El sistema expresión coordenada de una aplicación lineal (v. pg.69, (I)) se escribirá: $Y' = X'A$, donde $A = [t_i^j]$.

Se suele decir que: $X' = Y'P$ es la ecuación del cambio de coordenadas de X a Y , y que: $Y' = X'A$ es la ecuación de la aplicación lineal f en coordenadas X,Y.

TEOREMA 4: El producto de matrices tiene la propiedad asociativa.

Demostración: Sean $f: V^q \to V^p$, $g: V^p \to V^n$, $h: V^n \to V^m$ tres aplicaciones lineales de ecuaciones respectivas: $Y' = X'A$, $Z' = Y'B$, $U' = Z'C$.

Evidentemente, la ecuación de (h.g).f es: $U' = X'[A(BC)]$, y la de h.(g.f) es: $U' = X'[(AB)C]$. Pero siendo $(h.g).f = h.(g.f)$, se deduce: $A(BC) = (AB)C$.<>

TEOREMA 5: El producto de matrices tiene la propiedad distributiva con respecto a la suma.

Demostración: Sea A una matriz pxn, y B,C dos matrices nxm. El elemento (i,j) de $A(B + C)$ es por definición: $d_i^j = \Sigma\, a_i^\alpha(b_\alpha^j + c_\alpha^j) = \Sigma\, a_i^\alpha b_\alpha^j + \Sigma\, a_i^\alpha c_\alpha^j$, luego: $A(B+C)= AB + AC$.<>

TEOREMA 6: La matriz traspuesta de la AB , es igual al producto B'A' de la traspuestas en orden opuesto.

Demostración: Llamemos d_j^i al elemento (j,i) de B'A' ; se tiene: d_j^i = (fila j de B').(columna i de A') = (columna j de B).(fila i de A)= (fila i de A).(columna j de B)= elemento (i,j) de AB . Se concluye: B'A' = (AB)' .<>

Notemos que el tercer signo igual precedente es válido por ser K conmutativo. Por tanto, si K no fuese conmutativo, el Teorema no sería cierto.

EJERCICIOS:

5. Comprobar con ejemplos, que el producto de matrices no es conmutativo.
6. Comprobar con ejemplos, que puede ser: AB = (0), y no ser nulas A ni B.
7. Sea E_i^j una matriz de la base natural de M(p×n) y F_h^k una matriz de la base natural de M(n×m). Dar una fórmula general del producto: $E_i^jF_h^k$.
8. Sea E_i^j una matriz de la base natural de M(n×n) y A una matriz n×n. Calcular: $E_i^jAE_i^j$.

DEFINICION 6: Se llama matriz escalar a una matriz cuadrada diagonal D cuyos elementos d_i^i son iguales.

Su nombre se debe a lo siguiente.

TEOREMA 7: Si D es una matriz escalar n×n, tal que d_i^i= t, y A cualquier matriz n×m, se tiene: DA = tA . Si $\bar{D}$ es matriz escalar m×m tal que $\bar{d}_i^i$= t , se tiene: $A\bar{D}$ = tA .

Demostración: Se propone como Ejercicio.

En el caso t = 1, la matriz escalar n×n se dice matriz unidad de orden n, y se escribe: I_n. Ya que se tiene: $I_nA = AI_m = A$.

4.OPERACIONES ELEMENTALES EN UNA MATRIZ. MATRICES ELEMENTALES.

Sea $(a_1,\dots,a_n)$ un sistema de vectores de un espacio vectorial. Pues bien, tiene interés en la práctica, destacar que mediante cualquiera de las operaciones siguientes, se obtiene un sistema equivalente al dado (v. pg.57, Corol.8.1):

1ª) Permutación de dos vectores del sistema (en realidad, el sistema obtenido es el mismo anterior).

2ª) Sustitución de un vector a_i por el vector: $a_i + ta_j$ $(i \neq j)$.

3ª) Multiplicación de un vector a_i por un escalar $s \neq 0$.

Consideremos ahora el sistema $(A_1,\dots,A_n)$ de vectores fila de una matriz A n×m. Es un sistema de vectores del espacio vectorial K^m.

Analogamente, el sistema $(A^1,\dots,A^m)$ de las columnas de A, es un sistema de vectores de K^n.

DEFINICION 7: Las operaciones 1ª) 2ª) y 3ª) precedentes, aplicadas al sistema de las filas de una matriz A, ó al sistema de las columnas, reciben el nombre de <u>operaciones elementales</u> realizadas en A.

Por lo tanto, hay seis tipos distintos de operaciones elementales.

La razón de definir aquí estas operaciones, se debe a que la matriz obtenida realizando en A una tal operación, se obtiene tambien multiplicando A por una cierta matriz cuadrada, como veremos a continuación.

DEFINICION 8: Llamamos <u>matriz elemental</u> a una matriz cuadrada de cualquiera de los tipos siguientes:

mediante cualquiera de las operaciones siguientes, se obtiene un sistema equivalente al dado (v. pg.57, Corol.8.1):

1ª) Permutación de dos vectores del sistema (en realidad, el sistema obtenido es el mismo anterior).

2ª) Sustitución de un vector a_i por el vector: $a_i + ta_j$ $(i \neq j)$.

3ª) Multiplicación de un vector a_i por un escalar $s \neq 0$.

Consideremos ahora el sistema $(A_1, \ldots, A_n)$ de vectores fila de una matriz A n×m. Es un sistema de vectores del espacio vectorial K^m.

Analogamente, el sistema $(A^1, \ldots, A^m)$ de las columnas de A, es un sistema de vectores de K^n.

DEFINICION 7: Las operaciones 1ª) 2ª) y 3ª) precedentes, aplicadas al sistèma de las filas de una matriz A, ó al sistema de las columnas, reciben el nombre de operaciones elementales realizadas en A.

Por lo tanto, hay seis tipos distintos de operaciones elementales.

La razón de definir aquí estas operaciones, se debe a que la matriz obtenida realizando en A una tal operación, se obtiene tambien multiplicando A por una cierta matriz cuadrada, como veremos a continuación.

DEFINICION 8: Llamamos matriz elemental a una matriz cuadrada de cualquiera de los tipos siguientes:

1) $$P_{ij}=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & & j & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & \vdots & \vdots & \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & & 0 & 1 & \cdots \\ & & \vdots & \ddots & \\ \cdots & & 1 & 0 & \cdots \\ & & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

2) $$P_i^j(t)=\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} & & j & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & \vdots & \\ \cdots & 1 & t & \cdots \\ & & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & \vdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

3) $$Q_i(s)=\begin{pmatrix} 1 & & \vdots & \\ \cdots & & s & \cdots \\ & & \vdots & 1 \end{pmatrix} i$$

TEOREMA 8: Sea A una matriz y B_1, B_2, B_3 las matrices obtenidas realizando en A, respectivamente, una operación elemental 1ª, 2ª, 3ª, sobre las filas (columnas). Entonces, existen matrices elementales tales que:

$$B_1 = P_{ij}A \quad , \quad B_2 = P_i^j(t)A \quad , \quad B_3 = Q_i(s)A$$
$$(\ B_1 = AP_{ij} \quad , \quad B_2 = AP_j^i(t) \quad , \quad B_3 = AQ_i(s) \ ).$$

Demostración: Se propone como Ejercicio.(Basta realizar los productos y observar el resultado).

EJERCICIO:

9. Expresar cada una de las matrices elementales como combinación lineal de matrices E_i^j y matrices I_n.

5.ANILLO DE LAS MATRICES CUADRADAS DE ORDEN DADO.

~~Si están definidos los productos AB y BA, se deduce inmediatamente que las matrices A y B son cuadradas del mismo orden.~~ Por lo tanto, un conjunto en el que el producto de matrices sea operación binaria, es necesariamente un conjunto de matrices cuadradas del mismo orden. El más notable entre ellos es $M(n\times n)$, que indicaremos $M(n)$ para abreviar.

TEOREMA 9: El conjunto $M(n)$ dotado de las operaciones suma y producto de matrices, es un anillo con unidad.

Demostración: Se propone como Ejercicio.(Recordar que $(M,+)$ es grupo abeliano, y que el producto es asociativo, y distributivo respecto de la suma).

La unidad es I_n evidentemente.

EJERCICIOS:

10. Comprobar que las matrices diagonales de $M(n)$ constituyen un subanillo.
11. Demostrar que las matrices escalares de $M(n)$ constituyen un subanillo isomorfo a K.

Recordemos que el conjunto de los elementos inversibles de un anillo, es un grupo con la operación producto.

DEFINICION 9: Una matriz <u>inversible</u> es una matriz $n\times n$, elemento inversible del anillo $M(n)$. Se dice tambien <u>regular</u>. El grupo que forman las matrices inversibles de $M(n)$ con la operación producto, se llama <u>grupo lineal general de orden n</u>. Se escribe: $GL(n)$.

Con la notación acostumbrada, la matriz inversa de A se indica: A^{-1}..

EJERCICIOS:

12. Demostrar que si A es inversible, $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.
13. Demostrar que si A es inversible, el rango de filas es <u>n</u>, y asimismo el rango de columnas.
14. Probar que AB es regular si y solo si lo son A y B.

Recordemos (v. párrafo 2) que el conjunto $M(n)$ con la suma y el producto por un número, es un espacio vectorial sobre K. Pues bien, es inmediato comprobar que se cumple:

$$(\forall A,B \in M(n))\ (\forall t \in K)\quad t(AB) = (tA)B = A(tB)$$

y por tanto (v. pg.75, Def.4) el anillo $M(n)$ con la operación externa "producto por un número" es un algebra asociativa, de dimensión n^2.

EJERCICIOS:

15. Demostrar que toda matriz A de $M(n)$ cumple:
$$t_oI_n + t_1A + t_2A^2 + \ldots + t_mA^m = (0) \quad , \text{ donde } m \leq n .$$
16. Probar que si en la igualdad anterior es $t_o \neq 0$, la matriz A es inversible.
17. Sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión <u>n</u>, y (a_i)

una base dada. Comprobar que entonces, la aplicación
g: $\text{End}(V) \longrightarrow M(n)$ $\cancel{M(n) \longrightarrow \text{End}(V)}$ dada por: $g(f)$ = matriz coordenada $M(f,a_i)$
es un isomorfismo de algebras.

18. Dada una matriz inversible, calcular la inversa.
19. Hallar la inversa de cada matriz elemental.

LECCION 14

1.MATRICES DE VECTORES.

Siendo V un espacio vectorial sobre K, tiene interés considerar matrices cuyos elementos son vectores de V. Ya hicimos esto al escribir una matriz A sobre K, descompuesta en bloques fila A_i ó en bloques columna A^j, puesto que tales bloques son vectores de K^m ó K^n respectivamente.

La razón principal de dicho interés reside en la posibilidad de expresar con notación matricial, ventajosa por su brevedad, sistemas de combinaciones lineales de vectores. Esta posibilidad se debe a que tiene sentido la siguiente

DEFINICION 1: Llamamos <u>producto</u> de una matriz A $p\times n$ sobre K, por una matriz E $n\times m$ sobre V, a la matriz $p\times m$ sobre V, cuyo elemento (i,j) es: $a_i^1e_1^j+\ldots+a_i^ne_n^j$.

En particular, si escribimos una matriz columna sobre V:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [a_i]$$

se tiene: $X'[a_i] = x^1a_1+\ldots+x^na_n$; $A[a_i]=\begin{bmatrix} a_1^1a_1+\ldots+a_1^na_n \\ \cdots\cdots \\ a_p^1a_1+\ldots+a_p^na_n \end{bmatrix}$

2.APLICACIONES DEL CALCULO MATRICIAL A LAS COORDENADAS.

<u>Cambio de coordenadas</u>.

Ya se estudió en la Lección 11 (v. pg.66) el cambio de coordenadas en un espacio vectorial V, correspondiente a un cambio de base. Lo hacemos ahora utilizando el cálculo de matrices.

Sean $(a_j)(b_i)$ dos bases de V, y $\underline{a}$ un vector cualquiera. Escribamos: $a = x^1a_1+\ldots+x^na_n = y^1b_1+\ldots+y^nb_n$, que en notación matricial es:

$$a = X'[a_j] = Y'[b_j] \tag{1}$$

Por otra parte, sea: $b_i = t_i^1a_1+\ldots+t_i^na_n$ $(i = 1,\ldots,n)$ y en notación matricial:

$$[b_i] = A[a_j] \tag{2}$$

siendo $A = (t_i^j)$.

Sustituyendo (2) en (1) se tiene: $X'[a_j] = Y'A[a_j]$, y siendo los (a_j) independientes, se sigue: $X'= Y'A$, que es la ecuación del cambio de X a Y.

Analogamente, si es: $[a_j] = B[b_i]$ la expresión de los a_j como combinación lineal de los (b_i), se obtiene: $Y' = X'B$, que es la ecuación del cambio de Y a X.

Sustituyendo en (2) esta expresión de los (a_j), resulta: $[b_i] = AB[b_i]$, y por ser los (b_i) independientes, se sigue: $AB = I_n$. Si sustituimos (2) en la expresión citada, se tiene: $[a_j] = BA[a_j]$, luego: $BA = I_n$.

Por lo tanto, las matrices A y B son inversas, y el segundo cambio lo podemos escribir: $Y' = X'A^{-1}$.

Notemos que la ecuación: $X' = Y'A$ es equivalente a: $X = A'Y$, y escribiendo: $A' = P$, se tiene: $X = PY$,como ecuación del cambio de X a Y, siendo P una matríz cuya i-sima columna es la n-tupla coordenada de b_i en la base (a_j).

EJERCICIOS:

1. Demostrar que si (a_j) es base de V, el sistema $[b_i]= A[a_j]$ es base si y solo si A es inversible.
2. Dado un cambio de coordenadas $X = PY$ en K^3, obtener el cambio inverso y aplicar el método para calcular P^{-1}.

Expresión coordenada de una aplicación lineal.

Ya se obtuvo en la Lección 12 (V. pg.68) la expresión coordenada de una $f: V \longrightarrow W$, respecto de un par de bases (a_i) de V y (b_j) de W. Hagamoslo ahora usando el cálculo de matrices.

Sea: $fa_i = t_i^1 b_1 + \ldots + t_i^m b_m$ $(i = 1, \ldots, n)$; con notación matricial: $[fa_i] = A[b_j]$ (3), donde: $A = (t_i^j)$.

Si es $\underline{a}$ un vector cualquiera de V, $a = X'[a_i]$, luego: $fa = X'[fa_i]$, y sustituyendo (3) queda: $fa = X'A[b_j]$, de donde se sigue que la m-tupla coordenada Y' de $\underline{fa}$ en la base (b_j) cumple: $Y' = X'A$, que es la ecuación de f respecto del par de bases $(a_i)(b_j)$.

Notemos que la ecuación anterior es equivalente a: $Y = A'X$ donde la matriz A' tiene por i-sima columna la m-tupla coordenada de fa_i en la base (b_j).

En el caso V = W, se supone siempre $b_i = a_i$, ya que sería inconveniente usar un sistema coordenado para $\underline{a}$ y otro para $\underline{fa}$. Entonces, si es: $Y = BX$ la ecuación de un endomorfismo f, la i-sima columna de B es la n-tupla coordenada de fa_i en la base (a_i).

EJERCICIOS:

3. Sea $Y = BX$ la ecuación de un endomorfismo f de V, y $X = P\bar{X}$ la ecuación de un cambio de coordenadas. Escribir la ecuación de f en las coordenadas $\bar{X}$.
4. Hallar la ecuación de una $f: K^n \longrightarrow K^m$ respecto de las bases canónicas, conociendo las imagenes de la base de K^n.

3. RANGO DE UNA MATRIZ.

Sea una matriz A n×m sobre K. Recordemos la siguiente

DEFINICION 2: Llamamos rango de filas de A al rango de $(A_1, \ldots, A_n)$ donde las A_i se consideran vectores de K^m. Analogamente, llamamos rango de columnas de A al $\text{rang}(A^1, \ldots, A^m)$ donde las A^j se consideran vectores de K^n.

TEOREMA 1: Si $Y' = X'A$ es la ecuación de una aplicación lineal $f: V \longrightarrow W$, se tiene que el rango de filas de A es igual al rango de f.

Demostración: Sean (a_i) la base correspondiente al sistema coordenado X de V, y (b_j) la del Y de W ; sabemos que: $\text{rang } f = \text{rang }(fa_1, \ldots, fa_n)$ (v. pg.69, Corol.4.1). Ahora bien, la m-tupla coordenada de fa_i en la base (b_j) es A_i , y siendo el sistema coordenado: $b \mapsto Y$, un isomorfismo, se sigue que: $\text{rang }(fa_1, \ldots, fa_n) = \text{rang }(A_1, \ldots, A_n)$.<>

TEOREMA 2: Si P es regular $n \times n$ y Q regular $m \times m$, la matriz PAQ tiene el mismo rango de filas que A.

Demostración: Sea V un espacio de dimensión $\underline{n}$, W uno de dimensión $\underline{m}$, y X,Y sendos sistemas coordenados. Entonces, $Y' = X'A$ es la ecuación de una aplicación lineal $f: V \longrightarrow W$. Como P y Q son regulares, las ecuaciones: $X' = \bar{X}'P$, $Y' = \bar{Y}'Q^{-1}$ son sendos cambios de coordenadas en V y W. Aplicando estos cambios, la nueva ecuación de f es: $\bar{Y}' = \bar{X}'PAQ$, y por el Teorema precedente se tiene: rango filas PAQ = rang f = rango filas A. <>

En esta demostración se observa, de paso, el siguiente resultado: "Si es A una matriz coordenada de f, el conjunto de todas las matrices coordenadas de f es:

$$[\, PAQ \ni P \in GL(n),\ Q \in GL(m) \,].$$

TEOREMA 3: La relación R definida en $M(n \times m)$ mediante: $ARB \iff \exists\, P,Q$ regulares $\ni B = PAQ$, es de equivalencia.

Demostración: Se propone como Ejercicio.(Ayuda: notar que P y Q tienen inversa).

DEFINICION 3: Dos matrices A y B se dicen equivalentes si existen matrices P,Q regulares tales que: $B = PAQ$. Ello implica que A y B son de un mismo $M(n \times m)$. Se indicará: A eq.B .

TEOREMA 4: Si rango filas $A = r$, A es equivalente a la matriz $n \times m$ $[I_r, 0]$.

Demostración: Consideremos como en el Teorema 2, una aplicación lineal $f: V \longrightarrow W$, de ecuación: $Y' = X'A$. Por hipótesis y por dicho Teorema, rang $f = r$. Sea Ker $f = N$, luego: dim $N = n - r$. Elijamos una base $(c_{r+1},\dots,c_n)$ de N y completemosla hasta obtener una base $(c_1,\dots,c_r,c_{r+1},\dots,c_n)$ de V.

Ahora bien, la familia $(fc_1,\dots,fc_r)$ es libre. En efecto, si fuese: $t^1(fc_1)+\dots+t^r(fc_r) = 0_W$ con algún $t^j \neq 0$, se tendría: $f(t^1c_1+\dots+t^rc_r) = 0_W$, luego: $t^1c_1+\dots+t^rc_r \in N$; pero: $t^1c_1+\dots+t^rc_r \neq 0_V$ por ser un $t^j \neq 0$ y $(c_1,\dots,c_r)$ libre; esto es imposible ya que $K(c_1,\dots,c_r)$ y N son suplementarios.

Escribamos: $d_1 = fc_1, \dots, d_r = fc_r$, que siendo independientes, podemos completar hasta formar una base $(d_1,\dots,d_r,d_{r+1},\dots,d_m)$ de W. A continuación, efectuamos en V el cambio de base $(a_i) \longrightarrow (c_i)$ que en coordenadas es: $X' = \bar{X}'P$; y en W el cambio $(b_j) \longrightarrow (d_j)$ que en coordenadas sea: $Y' = \bar{Y}'Q$. Entonces, f toma la expresión coordenada: $\bar{Y}' = \bar{X}'PAQ^{-1}$, donde PAQ^{-1} es equivalente a A; pero por la elección hecha de las bases (c_i) (d_j), es inmediato que $PAQ^{-1} = [I_r, 0]$, puesto que su fila i-sima es la m-tupla coordenada de fc_i en la base d_j ó sea: $(0\dots1\dots0)$ si $j \le r$, y $(0\dots\dots0)$ si $j > r$. <>

COROLARIO 4.1: Dos matrices $n \times m$ son equivalentes si y solo si tienen el mismo rango de filas.

Si a partir de la Definición 2, consideramos las columnas de A en vez de las filas, tenemos:

TEOREMA 1 BIS: Si $Y = AX$ es la ecuación de una aplicación lineal $f: V^m \longrightarrow W^n$, entonces se tiene: Rango de columnas de A = rang f.

TEOREMA 2 BIS: Las matrices A y PAQ tienen el mismo rango de columnas si P y Q son regulares.

TEOREMA 4 BIS: Si rango columnas $A = s$, A es equivalente a la matriz $n \times m$ $[I_s, 0]$.

Demostraciones: Se proponen como Ejercicio.

TEOREMA 5: El rango de filas de una matriz A es igual al rango de columnas.

Demostración: De los Teoremas 4 y 4 bis se sigue: $[I_r, 0]$ eq.$[I_s, 0]$, luego por el Corolario 4.1 precedente, rango filas $[I_s, 0] = r$, y por tanto: $r = s$. <>

A este número se le llamará <u>rango de la matriz A</u>.

TEOREMA 6: Una matriz B nxn es regular si y solo si su rango es <u>n</u> .

Demostración: =>) si B es regular, $B = BI_n$ indica que B eq.I_n , luego: rang B = Rang $I_n = n$.

<=) si rang B = n , B eq.I_n (por el Corolario 4.1) luego existen matrices regulares P,Q tales que: $B = PI_nQ = PQ$, lo cual prueba que B es inversible, por serlo P y Q. <>

EJERCICIOS:

5. Hallar el rango de una matriz dada, mediante la obtención de una equivalente triangular.
6. Probar que el rango de una matriz que es suma diagonal de varias, es igual a la suma de los rangos de estas.
7. Sea A una matriz nxm , y B una matriz columna nx1. Demostrar que: rang A = rang [A B] <=> B es combinación lineal de las columnas de A.

4. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

En el párrafo 3 de la Lección 12 (v. pg.72) se estudió el conjunto de soluciones de una ecuación lineal, y en particular de un sistema de ecuaciones lineales. Ahora, con ayuda de lo conocido sobre matrices, vamos a concretar algo más dicho conjunto de soluciones.

Sea el sistema de <u>m</u> ecuaciones y <u>n</u> incógnitas:

$$t_1^1x^1 + \ldots + t_n^1x^n = b^1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$t_1^mx^1 + \ldots + t_n^mx^n = b^m$$

que en notación matricial escribimos: $AX = B$.

La matriz A se dice matriz de los coeficientes, y la $[A\ B]$ matriz ampliada.

TEOREMA 7: (Teorema de Rouché-Frobenius): Sea $AX = B$ un sistema de $\underline{m}$ ecuaciones lineales con $\underline{n}$ incógnitas. Entonces, existe alguna solución si y solo si: $\text{rang } A = \text{rang } [A\ B]$.

Si una solución es $a = (s^1, \dots, s^n)$, las demás componen el conjunto $a + N$, donde N es el núcleo de la aplicación lineal de K^n en K^m dada por: $Y = AX$, ó sea, el conjunto de soluciones del sistema: $AX = (0)$.

Demostración: Sean $A^1, \dots, A^n$ las columnas de A. Sabemos que dichas columnas y B son vectores del espacio vectorial K^m. El que exista una solución equivale al hecho de que B sea combinación lineal de las A^i. Se tiene pues: $\exists$ solución $\iff$ $B \in K(A^1, \dots, A^n) \iff K(A^1, \dots, A^n) = K(A^1, \dots, A^n, B) \iff$ $\text{rang } A = \text{rang } [A\ B]$ (v. pg.64, Corol.6.1).

La segunda parte del Teorema ya se demostró en el párrafo 3 de la Lección 12, citado. <>

COROLARIO 7.1: El núcleo N precedente es un subespacio de K^n, de dimensión: $n - \text{rang } A$ (v.Teorema 1 bis).

Sea $(a_1, \dots, a_{n-r})$ un sistema de $(n-r)$ soluciones de $AX = (0)$, linealmente independientes, es decir, una base de N. Entonces, si $\underline{a}$ es una solución de $AX = B$, el conjunto L de las soluciones es:

$$(\forall\, t^i \in K) \quad X = a + t^1 a_1 + \dots + t^{n-r} a_{n-r} \qquad (4).$$

Un conjunto de este tipo se dice <u>subespacio afín</u> ó <u>variedad lineal afín</u> de K^n, y las (4) <u>ecuaciones paramétricas de L</u>. Como L viene definido por el sistema de ecuaciones $AX = B$, estas se dicen <u>ecuaciones implícitas de L</u>.

Si $B = (0)$, $L = N$ y el sistema $AX = (0)$ se dice <u>homogéneo</u>. Entonces, L se dice <u>variedad lineal</u> (homogénea) de K^n, nombre sinónimo por tanto, de subespacio vectorial de K^n.

Obtención efectiva de las soluciones.

Es evidente que el conjunto F de los polinomios $[\ t_1x^1+\ldots+t_nx^n+t_o \nmid t_i \in K\ ]$ es un espacio vectorial sobre K, de dimensión n+1.

TEOREMA 8: Sea $AX = B$ un sistema de $\underline{m}$ ecuaciones con $\underline{n}$ incógnitas. Los $\underline{m}$ polinomios: $A_1X - b^1,\ldots, A_mX - b^m$, engendran un subespacio vectorial S de F. Entonces, si $(e_1,\ldots,e_p)$ es un sistema generador de S, el sistema de ecuaciones: $e_1 = 0,\ldots, e_p = 0$, tiene las mismas soluciones que el $AX = B$.

Demostración: Se propone como Ejercicio.(Ya es conocida del Bachillerato, con otra nomenclatura).

Este Teorema da lugar al método siguiente, conocido como resolución del sistema por eliminación.

Consiste en aplicar a la matriz ampliada [A B] operaciones elementales sobre las filas, hasta obtener una matriz triangular. Las filas de esta constituyen un sistema generador de S, y en virtud del Teorema 8 dan un sistema equivalente al dado (es decir, que tiene las mismas soluciones), fácilmente resoluble.

EJERCICIO:

8. Resolver sistemas de ecuaciones lineales, con coeficientes numéricos ó literales.

LECCION 15

1. FUNCIONES MULTILINEALES.

El concepto de aplicación lineal es generalizable del modo siguiente.

DEFINICION 1: Dados p+1 espacios vectoriales $V_1,\dots,V_p$, W, sobre un mismo cuerpo K, se llama aplicación p-lineal de $V_1\times\dots\times V_p$ en W, a una aplicación f del conjunto producto $V_1\times\dots\times V_p$ en W, que cumple para cada i:

1°) $(\forall\, v_i,\bar{v}_i \in V_i)\ f(v_1,\dots,v_i+\bar{v}_i,\dots,v_p) = f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_p) + f(v_1,\dots,\bar{v}_i,\dots,v_p)$.

2°) $(\forall\, v_i \in V_i)(\forall\, t \in K)\ f(v_1,\dots,tv_i,\dots,v_p) = tf(v_1,\dots,v_i,\dots,v_p)$.

EJERCICIOS:

1. Probar que las propiedades 1° y 2° equivalen a esta: $f(v_1,\dots,tv_i+s\bar{v}_i,\dots,v_p) = tf(v_1,\dots,v_i,\dots,v_p) + sf(v_1,\dots,\bar{v}_i,\dots,v_p)$.
2. Probar que asimismo, equivalen a la siguiente: Dados $v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_p$ fijos cualesquiera, la aplicación $f_i\colon V_i \longrightarrow W$, dada por: $f_i(v_i) = f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_p)$, es lineal.

Se comprende que el concepto de aplicación lineal es un caso particular de p-lineal, para $p = 1$.

En el caso $p > 1$, se dice genéricamente multilineal.

Notemos que en la Definición 1, $V_1\times\dots\times V_p$ no se considera espacio vectorial, y desde luego, f no es aplicación lineal del espacio vectorial producto en W.

Pasamos a estudiar el caso particular en que: $V_1 = V_2 = \dots = V_p = V$ y $W = K$, que es el más importante, y único que consideraremos en lo sucesivo, salvo aviso en contra.

DEFINICION 2: Se llama función (ó forma) p-lineal sobre V a una aplicación p-lineal $f\colon V^p \longrightarrow K$.

De manera análoga a la seguida para definir el espacio vectorial $\mathrm{Hom}(V,W)$, se puede definir en el conjunto $M(V^p,K)$ de las funciones p-lineales sobre V, una operación interna (+) y una externa (.) sobre K, escribiendo:

$$(f+g)(v_1,\dots,v_p) = f(v_1,\dots,v_p) + g(v_1,\dots,v_p)$$
$$(tf)(v_1,\dots,v_p) = tf(v_1,\dots,v_p) .$$

TEOREMA 1: El conjunto $M(V^p,K)$ dotado de las dos operaciones precedentes es un espacio vectorial sobre K.

Demostración: Se propone como Ejercicio.

El cero de este espacio es la función f_o definida por la condición: $(\forall\, v_1,\dots,v_p \in V)\ f_o(v_1,\dots,v_p) = 0$. Se dice a f_o función p-lineal nula.

Expresión coordenada.

Sea dim V = n , y $(a_1,\dots,a_n)$ una base de V. Escribamos: $v_i = x_i^1 a_1 + \dots + x_i^n a_n = \Sigma\ x_i^{ji} a_{ji}$. Entonces, si f es una función p-lineal sobre V, se tiene:

$f(v_1,\dots,v_p) = f(\Sigma\, x_1^{j1} a_{j1}\ ,\dots,\ \Sigma\, x_p^{jp} a_{jp})$ = (por ser f p-lineal)= $\sum_{j1=1}^{n}\dots\sum_{jp=1}^{n} x_1^{j1}\ \dots\ .x_p^{jp} f(a_{j1},\dots,a_{jp})$ (1).

Si los x_i^{ji} tienen significado de indeterminadas, el polinomio (1) es homogéneo de grado p, y lineal para cada n-tupla $(x_i^1,\dots,x_i^n)$. Se dice a (1) expresión coordenada de f en la base (a_i), ó en el sistema coordenado X correspondiente.

Un polinomio del tipo (1) se dice homogéneo p-lineal.

TEOREMA 2: Un polinomio P homogéneo p-lineal con coeficientes en K, define una función p-lineal f: $(K^n)^p \longrightarrow K$, mediante: $f(t_1,\dots,t_p) = P(t_1,\dots,t_p)$, donde t_i es un vector de K^n, es decir, una n-tupla de números de K.

Demostración: Es consecuencia inmediata de la definición de polinomio homogéneo p-lineal.

EJERCICIOS:

3. Hallar el número de términos de (1) si ningún coeficiente es cero.
4. Para n = 3 , p = 2 , hallar una base de $M(V^2,K)$.

2. APLICACION TRANSFORMADA POR UNA PERMUTACION.

Sea una aplicación $f: V^p \longrightarrow K$, arbitraria, y α una permutación del grupo simétrico $S(p)$.

DEFINICION 3: Se llama aplicación transformada de f por α a la aplicación $g: V^p \longrightarrow K$, definida por: $g(v_1,\dots,v_p) = f(v_{\alpha 1},\dots,v_{\alpha p})$. Se indica: $g = \alpha f$.

Propiedades:

1ª) Si f es p-lineal, αf tambien lo es. En efecto: $\alpha f(v_1,\dots,v_i+\bar{v}_i,\dots,v_p) = f(v_{\alpha 1},\dots,v_{\alpha i}+\bar{v}_{\alpha i},\dots,v_{\alpha p}) = f(v_{\alpha 1},\dots,v_{\alpha i},\dots,v_{\alpha p}) + f(v_{\alpha 1},\dots,\bar{v}_{\alpha i},\dots,v_{\alpha p}) = \alpha f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_p) + \alpha f(v_1,\dots,\bar{v}_i,\dots,v_p)$. Analogamente se ve que αf cumple el axioma 2° de aplicación p-lineal.

2ª) Si α y $\bar{\alpha}$ son dos permutaciones de $S(p)$ se tiene:

$$\alpha(\bar{\alpha}f) = (\alpha\bar{\alpha})f$$

lo cual se comprueba aplicando simplemente la definición.

DEFINICION 4: La aplicación $f: V^p \longrightarrow K$ se dice simétrica si cumple: $(\forall\, \alpha \in S(p))\ \ \alpha f = f$.

DEFINICION 5: La aplicación $f: V^p \longrightarrow K$ se dice antisimétrica si cumple: $(\forall\, \alpha \in S(p))\ \alpha f = e_\alpha f$, donde e_α es la signatura de α.

TEOREMA 3: La aplicación f es antisimétrica si y solo si cumple, para toda transposición t de $S(p)$: $tf = -f$.

Demostración: =>) Inmediato.

<=) Dada una permutación α, recordemos que se tiene (v. pg.38, Teor.3): $\alpha = t_1.\ \dots\ .t_r$, y $(-1)^r = \text{sig}\ \alpha$. Ahora bien, de la propiedad 2ª precedente se deduce:

$$\alpha f = (t_1.\dots.t_r)f = (t_1\dots t_{r-1})(t_r f) = (t_1\dots t_{r-1})(-f),$$

y así siguiendo, se llega a: $\alpha f = (-1)^r f = e_\alpha f$. <>

DEFINICION 4: Una aplicación $f: V^p \longrightarrow K$ se dice alternada, si cumple: $v_i = v_j$, $i \neq j \Rightarrow f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_p) = 0$.

TEOREMA 4: Una función p-lineal f es antisimétrica si y solo si es alternada.

Demostración: =>) Siendo antisimétrica, se tiene: $f(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_p) = -f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_p)$; luego si $v_i = v_j$, se sigue: $2f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_p) = 0$. Por lo tanto (suponiendo $2 \neq 0$) se concluye: $f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_i,\dots,v_p) = 0$.

<=) Situando en los lugares i,j la misma suma v_i+v_j , se tiene: $f(v_1,\dots,v_i+v_j,\dots,v_i+v_j,\dots,v_p) =$

$= f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_i,\dots,v_p) + f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_p) +$

$+ f(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_p) + f(v_1,\dots,v_j,\dots,v_j,\dots,v_p)$;

pero siendo f alternada, queda:

$$0 = f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_p) + f(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_p),$$

luego por el Teorema 3, f es antisimétrica. <>

COROLARIO 4.1: Si la familia $(v_1,\dots,v_p)$ es ligada y f es p-lineal alternada, se sigue: $f(v_1,\dots,v_p) = 0$.

Demostración: Se propone como Ejercicio.

EJERCICIOS:

5. Demostrar que si $p > \dim V$, la única función p-lineal antisimétrica $f: V^p \dashrightarrow K$, es la nula.
6. Dada una función p-lineal $f: V^p \dashrightarrow K$, se llama antisimetrizada de f a la función: $Af = \sum_\alpha e_\alpha(\alpha f)$, donde α recorre todo el $S(p)$. Demostrar que Af es antisimétrica.
7. Con la notación del ejercicio anterior, demostrar que la función $Sf = \sum_\alpha (\alpha f)$ es simétrica.
8. Comprobar que el conjunto de las funciones p-lineales alternadas es un subespacio vectorial de $M(V^p,K)$, y calcular su dimensión.

3.FUNCION DETERMINANTE.

Definicion 5: Dado un espacio vectorial V de dimensión n, se llama función determinante sobre V a una función D n-lineal alternada.

TEOREMA 5: La expresión coordenada de una función determinante D respecto de una base $(a_1,\dots,a_n)$ de V , es:

$$D(v_1,\dots,v_n) = D(a_1,\dots,a_n)\sum_{\alpha} e_\alpha x_1^{\alpha 1} \dots x_n^{\alpha n} \qquad (2)$$

donde α recorre todo el $S(n)$.

Demostración: En este caso, la expresión coordenada (1) es: $D(v_1,\dots,v_n) = \sum_{j1=1}^{n}\dots\sum_{jn=1}^{n} x_1^{j1} \dots x_n^{jn} D(a_{j1},\dots,a_{jn})$.

Ahora bien, $(j1,\dots,jn)$ es una n-tupla formada con números de $E = \{1,\dots,n\}$, distintos ó repetidos, es decir, un elemento de $E \times \overset{n}{\dots} \times E$. Pero cada n-tupla que tenga un número repetido, da un término nulo, ya que $D(a_{j1},\dots,a_{jn})$ tendrá entonces dos vectores iguales y por ello será cero.

Por otra parte, cada n-tupla que tenga todos los números distintos, es una "permutación", es decir, es la imagen de la n-tupla $(1,\dots,n)$ por una permutación α. Podemos pues escribir:

$D(v_1,\dots,v_n) = \sum_{\alpha} x_1^{\alpha 1} \dots x_n^{\alpha n} D(a_{\alpha 1},\dots,a_{\alpha n}) =$

$= \sum_{\alpha} x_1^{\alpha 1} \dots x_n^{\alpha n} e_\alpha D(a_1,\dots,a_n)$, donde α recorre todo el $S(n)$; finalmente, sacando factor común $D(a_1,\dots,a_n)$, se obtiene la tesis. <>

COROLARIO 5.1: Si para una base (a_i) es $D(a_1,\dots,a_n) = 0$, se sigue: $D(v_1,\dots,v_n) = 0$ para todo $(v_1,\dots,v_n)$. Es decir, D es función nula $\Leftrightarrow D(a_1,\dots,a_n) = 0$ para una base (a_i) de V.

COROLARIO 5.2: Si D y $\bar{D}$ son dos funciones determinantes sobre V, son proporcionales, ya que de (2) se sigue:

$(\forall v_1,\dots,v_n)\ D(v_1,\dots,v_n)/D(a_1,\dots,a_n) = \bar{D}(v_1,\dots,v_n)/\bar{D}(a_1,\dots,a_n)$.

Recíproco del Teorema anterior, puede considerarse el siguiente teorema de existencia.

TEOREMA 6: Dada una base (a_i) de V, la aplicación $D: V^n \to K$ definida por: $D(v_1,\dots,v_n) = c\sum_{\alpha} e_\alpha x_1^{\alpha 1} \dots x_n^{\alpha n}$, donde: $v_i = x_i^1 a_1 + \dots + x_i^n a_n$, y $\underline{c}$ escalar fijo, es una función determinante.

Demostración: D es claramente n-lineal, ya que en cada sumando hay una coordenada y solo una de v_i($\underline{i}$ fijo cualquiera).

Para probar que es alternada, supongamos $v_i = v_j$, $i < j$ - y llamemos t a la transposición $[i,j]$. Si indicamos con α' las permutaciones en que: $\alpha' i < \alpha' j$, y con α^* aquellas en que: $\alpha^* i > \alpha^* j$, se pueden clasificar las permutaciones (α) por parejas (α', α^*) tales que: $\alpha^* = \alpha' t$, y se tiene:

$$D(v_1, \ldots, v_n) = c \sum_{\alpha'} (e_{\alpha'} x_1^{\alpha' 1} \cdots x_n^{\alpha' n} + e_{t\alpha'} x_1^{\alpha' t 1} \cdots x_n^{\alpha' t n}) =$$

$$= c \sum_{\alpha'} (e_{\alpha'} x_1^{\alpha' 1} \cdots x_i^{\alpha' i} \cdots x_j^{\alpha' j} \cdots x_n^{\alpha' n} - e_{\alpha'} x_1^{\alpha' 1} \cdots x_i^{\alpha' j} \cdots x_j^{\alpha' i} \cdots x_n^{\alpha' n});$$

pero siendo $x_i^r = x_j^r$, se sigue que en cada paréntesis anterior los dos productos solo se diferencian en el orden de los factores, y portanto el paréntesis es cero. Se concluye: $v_i = v_j \Rightarrow D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0$. <>

EJERCICIO:

9. Probar que en el Teorema 6, $c = D(a_1, \ldots, a_n)$.

TEOREMA 7 (Teorema de unicidad): Dada una base (a_i)de V y un escalar $\underline{c}$, existe una y solo una función determinante D tal que: $D(a_1, \ldots, a_n) = c$.

Demostración: Que existe una, lo ha probado el Teorema 6 con el Ejercicio anterior. Que solo una, se sigue de que su expresión coordenada (2) en la base (a_i) está unívocamente determinada. <>

TEOREMA 8: Una familia (v_i) de $\underline{n}$ vectores es ligada $\Leftrightarrow$ $D(v_1, \ldots, v_n) = 0$ para alguna función determinante D distinta de la nula.

Demostración: $\Rightarrow$) Inmediato, por ser D alternada.

$\Leftarrow$) Si (v_i) no fuese ligada, sería libre, luego base de V, y por el Corolario 5.1, D sería nula contra la hipótesis. <>

4. ORIENTACION DE UN ESPACIO VECTORIAL REAL.

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo real, de dimensión finita. En este párrafo, entendemos por <u>base</u> una base <u>ordenada</u> , es decir, una n-tupla de vectores independientes.

TEOREMA 9: Sea D una función determinante sobre V, no nula, y $B = \{ (a_i),(b_i),\ldots \}$ el conjunto de las bases de V. Entonces, la relación binaria en B: $(a_i)R(b_i) \Leftrightarrow D(a_1,\ldots,a_n)/D(b_1,\ldots,b_n) > 0$, cumple: 1°) es de equivalencia, 2°) es la misma para cualquier D no nula.

Demostración: 1°) es inmediato, ya que por definición, $(a_i)R(b_i)$ equivale a que los números $D(a_i)$ y $D(b_i)$ son del mismo signo.

2°) Si $\bar{D}$ es otra función determinante no nula, sabemos por el Corolario 5.2 que: $D(a_i)/D(b_i) = \bar{D}(a_i)/\bar{D}(b_i)$, luego ambos miembros tienen el mismo signo. <>

EJERCICIO:

10. Probar que las clases de equivalencia de R son dos.

DEFINICION 6: Si dos bases (a_i) (b_i) son equivalentes por R, es decir, si $D(a_i)$ y $D(b_i)$ tienen el mismo signo, se dice que tienen la misma orientación.

Conviniendo en que una base dada (a_i) se diga de orientación positiva , todas las bases equivalentes a (a_i) por R se dirán de orientación positiva, y las demás de orientación negativa.

Por ejemplo, en el plano ordinario de vectores libres, se suele adoptar como orientación positiva, la de una base $(\overline{OA},\overline{OB})$ tal que cuando $\overline{OA}$ gira hacia $\overline{OB}$ por el camino más corto, lo hace en sentido contrario al de las agujas de un reloj. En el espacio ordinario de vectores libres, se adopta corrientemente como positiva, la orientación de una base $(\overline{OA},\overline{OB},\overline{OC})$ tal que una persona situada con los pies en O y la cabeza en C, ve el par $(\overline{OA},\overline{OB})$ orientado en el sentido positivo anterior.

EJERCICIOS:

11. Probar que las bases $(a_1,\ldots,a_n)$ y $(a_{\alpha 1},\ldots,a_{\alpha n})$ son de la misma orientación si y solo si: $\operatorname{sig} \alpha = +1$.

LECCION 16

1. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA. PROPIEDADES.

En la Lección precedente hemos visto que en la expresión coordenada (2) de una función determinante respecto de una base (a_i), hay un factor que cambia con la D, y otro que es el mismo para cualquier D y cada sistema $(v_1,\dots,v_n)$, pues depende únicamente de las coordenadas de estos vectores en la base (a_i). Sean $(t_i^1,\dots,t_i^n)$ las de v_i ; para $i = 1,\dots,n$, estas n-tuplas coordenadas pueden tomarse como filas de una matriz cuadrada A.

DEFINICION 1: Se llama determinante de la matriz cuadrada A , al escalar: $\sum e_\alpha t_1^{\alpha 1} \cdot \dots \cdot t_n^{\alpha n}$, donde α recorre S(n). Se escribirá D(A) , y tambien $|A|$.

EJEMPLOS:

n = 2) $|A| = t_1^1 t_2^2 - t_1^2 t_2^1$.

n = 3) $|A| = t_1^1t_2^2t_3^3 + t_1^2t_2^3t_3^1 + t_1^3t_2^1t_3^2 - t_1^3t_2^2t_3^1 - t_1^2t_2^1t_3^3 - t_1^1t_2^3t_3^2$.

Los tres sumandos positivos salen de la diagonal principal y sus paralelas, y los negativos de la diagonal secundaria y sus paralelas.(Regla de Sarrus).

TEOREMA 1: El determinante de A es igual al de su traspuesta.

Demostración: Como el elemento (i,j) de A' es el t_j^i de A, se tiene: $D(A') = \sum_\alpha e_\alpha t_{\alpha 1}^1 \cdot \dots \cdot t_{\alpha n}^n$. Pero si ordenamos los factores del producto: $t_{\alpha 1}^1 \cdot \dots \cdot t_{\alpha n}^n$, por subíndices, se tiene: $t_1^{\bar\alpha 1} \cdot \dots \cdot t_n^{\bar\alpha n}$, donde $\bar\alpha$ es la permutación inversa de α. Ahora bien, como: $\alpha\bar\alpha$ = identidad, (sig α).(sig $\bar\alpha$)= 1 , luego: $e_\alpha = e_{\bar\alpha}$. Por lo tanto: $D(A') = \sum e_{\bar\alpha} t_1^{\bar\alpha 1} \cdot \dots \cdot t_n^{\bar\alpha n}$, donde α recorre S(n); pero la aplicación de ${}^\alpha S(n)$ en sí dada por: $\alpha \longrightarrow \bar\alpha$, es biyectiva, luego cuando α recorre S(n), $\bar\alpha$ tambien lo recorre. En definitiva: D(A') = D(A) .<>

COROLARIO 1.1: Si la columna j-sima de A es $(t_1^j,\dots,t_n^j)$

se tiene: $D(A) = \sum_{\alpha} e_{\alpha} t^1_{\alpha 1} \cdot \ldots \cdot t^n_{\alpha n}$

Esta última expresión es el desarrollo de $D(A)$ por columnas, y la dada en la Definición 1 es el desarrollo por filas.

Las propiedades principales de los determinantes, se siguen del hecho que establecemos a continuación.

TEOREMA 2: Sea la aplicación $\bar{D}$: $(K^n)^n \longrightarrow K$, dada por: $\bar{D}(A_1,\ldots,A_n) = |A|$, donde A es la matriz cuyas filas son $A_1,\ldots,A_n$. Entonces, $\bar{D}$ es una función determinante sobre K^n.

Demostración: Sea $(E_1,\ldots,E_n)$ la base natural del espacio vectorial K^n; sabemos que los elementos de una n-tupla A_i son sus coordenadas en dicha base. Por ello, es inmediato ver que la función determinante D sobre K^n, tal que $D(E_1,\ldots,E_n) = 1$, es precisamente la $\bar{D}$ del enunciado (v. pg.99, Teor.7). <>

TEOREMA 2 BIS: Sea $\bar{D}$ la aplicación: $(K^n)^n \longrightarrow K$, dada por: $\bar{D}(A^1,\ldots,A^n) = |A|$, donde A es la matriz cuyas columnas son $A^1,\ldots,A^n$. Entonces, $\bar{D}$ es una función determinante sobre K^n.

Demostración: Se propone como Ejercicio.(Ayuda: tener en cuenta que A^i son las filas de A').

Propiedades de los determinantes.

1ª) Si las filas de A son $(A_1,\ldots,A_i+\bar{A}_i,\ldots,A_n)$, se tiene: $D(A) = D(A_1,\ldots,A_i,\ldots,A_n) + D(A_1,\ldots,\bar{A}_i,\ldots,A_n)$. Analogamente para las columnas.

2ª) Si una fila (columna) de A se multiplica por un escalar t, el determinante de la nueva matriz es igual a $t|A|$.

3ª) Si dos filas (columnas) de A se permutan entre sí, el determinante de la nueva matriz es $-|A|$.

4ª) Si dos filas (columnas) de A son iguales ó proporcionales, $|A| = 0$. En general, la familia de las filas (columnas) es ligada si y solo si $|A| = 0$ (v. pg.99, Teor.8).

5ª) Si una fila (columna) de A se sustituye por la que resulta sumándole una combinación lineal de las demás, el determinante de la nueva matriz es tambien $|A|$.

Apoyándose en esta propiedad 5^a) se puede calcular un determinante, triangulando la matriz mediante operaciones elementales del tipo 2.

EJERCICIOS:

1. Calcular los determinantes de las matrices elementales.
2. Calcular determinantes de matrices numéricas ó literales diversas.
3. Probar que si A es antisimétrica de orden impar, $D(A)=0$.
4. Demostrar que A es inversible si y solo si $D(A) \neq 0$.
5. Demostrar que si A es triangular, $D(A)$ = producto de los elementos de la diagonal principal.

2.PRODUCTO DE DETERMINANTES.

TEOREMA 3: El determinante de la matriz AB es igual al producto de los determinantes de A y B.

Demostración: Sea $A = (a_i^j)$ y $(B_1,\ldots,B_n)$ las filas de B. Sabemos (v. pg.81, Teor.3) que la fila i-sima del producto AB es: $a_i^1B_1+\ldots+a_i^nB_n$. Por lo tanto:

$$D(AB) = D\Big(\sum_{j1=1}^{n} a_1^{j1}B_{j1} ,\ldots, \sum_{jn=1}^{n} a_n^{jn}B_{jn} \Big) =$$

$$= D(B_1,\ldots,B_n) \sum_{\alpha} e_\alpha a_1^{\alpha 1} \ldots a_n^{\alpha n} \quad ,$$

por idéntico razonamiento al seguido en el Teorema 5 de la Lección 15 (v. pg,97). Pero la última expresión es igual a: $D(B).D(A) = D(A).D(B)$.<>

COROLARIO 3.1: $|A'B| = |AB| = |AB'| = |A'B'|$.

EJERCICIOS:

6. Comprobar las propiedades 2^a 3^a y 5^a anteriores; teniendo en cuenta que las operaciones elementales equivalen a producto por una matriz elemental.
7. Sea V un espacio vectorial de dimensión <u>n</u> , y h un endomorfismo dado. Demostrar que el determinante de cualquier matriz coordenada de h es constante; se dice <u>determinante</u> de <u>h</u> y se se indica D(h).

8. Probar que la aplicación: End(V) —> K dada por: h —>D(h) es un homomorfismo para la operación producto.

3.DESARROLLO POR LOS ELEMENTOS DE UNA LINEA.

Sea $A = (t_i^j)$ y $|A| = \sum e_\alpha t_1^{\alpha 1} \cdots t_n^{\alpha n}$. Los términos de esta suma que tengan a t_i^1 (i^α fijo) como factor, los agrupamos sacando a t_i^1 factor común; y llamemos A_1^i al paréntesis que multiplica a dicho t_i^1. Como en cada término del desarrollo de $|A|$ hay un elemento y solo uno de la fila i-sima, haciendo con $t_i^2, \ldots, t_i^n$ lo mismo que se ha hecho con t_i^1 , queda:

$$|A| = t_i^1 A_1^i + \ldots + t_i^n A_n^i \qquad (1).$$

DEFINICION 2: El escalar A_j^i se llama adjunto ó cofactor de t_i^j en el determinante $|A|$. Y el segundo miembro de (1) se dice desarrollo de $|A|$ por los elementos de la fila i-sima.

Analogamente se tiene el desarrollo de $|A|$ por los elementos de una columna.

DEFINICION 3: Dado un elemento t_i^j de A , se llama menor complementario de t_i^j , al determinante de la submatriz de A que resulta de suprimir en esta, la fila isima y la columna j-sima. Se escribirá: D_j^i .

TEOREMA 4: Si A_j^i es el adjunto de t_i^j y D_j^i el menor complementario, se tiene: $A_j^i = (-1)^{i+j} D_j^i$.

Demostración:

Caso i = j = 1) Entonces, los términos del desarrollo de $|A|$ en que entra t_1^1, son aquellos en que: $\alpha 1 = 1$; por lo tanto:

$$A_1^1 = \sum_\alpha e_\alpha t_2^{\alpha 2} \cdots t_n^{\alpha n} ,$$

donde α recorre el conjunto $S_1 = \{\alpha \in S(n) \nrightarrow \alpha 1 = 1\}$. Pero por ser $\alpha 1 = 1$, se ve que $(\alpha 2, \ldots, \alpha n)$ es la imagen de una permutación α' del conjunto $\{2, \ldots, n\}$, y podemos escribir: $(\alpha' 2, \ldots, \alpha' n) = (\alpha 2, \ldots, \alpha n)$. Por otra parte, $e_\alpha = e_{\alpha'}$, ya que $\alpha 1 = 1$ no forma inversión con los siguientes αi. En conclusión:

$$A_1^1 = \sum_{\alpha'} e_{\alpha'} t_2^{\alpha' 2} \cdots t_n^{\alpha' n}$$

donde α' recorre el grupo simétrico $S[2,\ldots,n]$, y por lo tanto: $A_1^1 = D_1^1$.

Caso general) Dado un t_i^j de A, escribamos:

$$A^* = \begin{pmatrix} t_i^j & t_i^1 & \cdots & \cancel{j} & \cdots & t_i^n \\ t_1^j & t_1^1 & \cdots & \cdot & \cdots & t_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cancel{i} & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ t_n^j & t_n^1 & \cdots & \cdot & \cdots & t_n^n \end{pmatrix}$$

donde $\cancel{i}$, $\cancel{j}$ indica que faltan en ese lugar la fila $\underline{i}$ y la columna $\underline{j}$ (las cuales están en el primer lugar). Un modo de obtener la matriz A^* es aplicar a A $\underline{i-1}$ transposiciones de filas (la i-sima con cada una de las precedentes), seguido de $\underline{j-1}$ trasposiciones de columnas (la j-sima con cada precedente); luego por la propiedad 3ª se tiene: $|A^*| = (-1)^{i+j}|A|$.

Ahora bien, desarrollando $|A^*|$ y $|A|$, el coeficiente de t_i^j en el primer miembro es: D_j^i , y en el segundo: $(-1)^{i+j} A_j^i$; como ambos miembros son iguales, queda probado el teorema. <>

COROLARIO 4.1: El desarrollo de $|A|$ por los elementos de una fila, puede escribirse así:

$$|A| = (-1)^{i+1}(t_i^1 D_1^i - \ldots \pm t_i^n D_n^i) \qquad (2)$$

donde en el paréntesis se toman alternativamente los signos más y menos. Analogamente se escribiría el desarrollo por los elementos de una columna.

La fórmula (2) reduce el cálculo de un determinante de orden $\underline{n}$, al de determinantes de orden $\underline{n-1}$, lo cual tiene gran interés práctico en la mayoría de las ocasiones.

EJERCICIOS:

9. Demostrar que si una matriz A es suma diagonal de varias, su determinante es igual al producto de los de estas.(Basta probarlo en el caso de dos).
10. Calcular determinantes mediante desarrollos por los elementos de una línea.

TEOREMA 5: La suma de los productos de los elementos de una línea de A, por los adjuntos de los de una línea paralela, es cero.

Demostración: Consideremos dos filas, i-sima y k-sima, $i \neq k$. Ahora, sea A^* la matriz que se obtiene sustituyendo en A la fila k por la fila i. Como A^* tiene dos filas iguales, $|A^*| = 0$. Pero desarrollando $|A^*|$ por los elementos de la fila k-sima, se tiene claramente: $|A^*| = t_i^1 A_1^k + \ldots + t_i^n A_n^k$.<>

COROLARIO 5.1: $(\forall i,j)\quad t_i^1 A_1^j + \ldots + t_i^n A_n^j = \delta_i^j |A|$.

COROLARIO 5.2: Si $|A| \neq 0$, la matriz inversa de A tiene por elemento (i,j): $A_i^j/|A|$.

Llamando <u>matriz adjunta</u> de A, la que tiene por elemento (i,j) el adjunto de t_i^j (que es A_j^i), resulta que la matriz inversa anterior es la traspuesta de la adjunta multiplicada por $|A|^{-1}$.

4.REGLA DE CRAMER.

Se llama <u>sistema de Cramer</u> a un sistema de ecuaciones lineales $AX = B$, tal que A es cuadrada y regular. Es decir, a un sistema de n ecuaciones independientes con n incógnitas.

TEOREMA 6 (Regla de Cramer): Un sistema de Cramer

$$a_1^j x^1 + \ldots + a_n^j x^n = b^j \quad (j = 1,\ldots,n)$$

posee una solución única, dada por:

$$x^i = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_1^1 & .. & b^1 & .. & a_n^1 \\ . & .. & . & .. & . \\ a_1^n & .. & b^n & .. & a_n^n \end{vmatrix}$$

donde la columna B ha sustituido a la columna i-sima de A.

Demostración: Multiplicando la j-sima ecuación por el adjunto A_j^i de a_i^j , se tiene:

$$A_j^i a_1^j x^1 + \ldots + A_j^i a_n^j x^n = b^j A_j^i \quad (j = 1,\ldots,n).$$

Sumando estas n ecuaciones, resulta (v.Corolario 5.1):

$$|A|(\delta_1^i x^1 + \ldots + \delta_i^i x^i + \ldots + \delta_n^i x^n) = \Sigma\, b^j A_j^i \quad ,$$

ó sea: $|A|x^i = \sum b^j A^i_j$. Despejando x^i, se tiene la tesis. <>

La regla de Cramer puede aplicarse tambien a sistemas $AX = B$, donde: rang A = rang $[A\ B] = n$, pues en esta caso, el sistema es equivalente a uno de Cramer.

Incluso en el caso general compatible, puede aplicarse la regla, ya que si: rang $A = r < n$, tomando $\underline{r}$ columnas de A independientes, y pasando las demás al segundo miembro, se tiene un sistema de Cramer donde los términos b^j no son escalares, pero la regla permite despejar las incógnitas de las $\underline{r}$ columnas citadas, en función de las demás incógnitas, que pueden tomar valores arbitrarios.

Notemos que el interés práctico de la Regla de Cramer es pequeño, ya que exige más cálculos que otros métodos, sobre todo cuando $\underline{n}$ es superior a 3.

EJERCICIO:

11. Sea $AX = (0)$ un sistema homogéneo donde rang $A = n-1$. Aplicar la regla de Cramer para obtener la solución general del sistema.

5. MENORES DE UNA MATRIZ ARBITRARIA.

Sea A una matriz $m\times n$ arbitraria.

DEFINICION 4: Se llama menor de A al determinante de una submatriz cuadrada de A.

TEOREMA 7: El rango de A es igual al máximo orden de las submatrices regulares de A.

Demostración: Sea rang $A = r$, y máx $\{p \mid$ existe submatriz $p\times p$ regular$\} = s$.

Por hipótesis, existe una submatriz B regular de orden $\underline{s}$; sean $i_1,\dots,i_s$ los subíndices de sus filas. Entonces, la submatriz de A formada con las filas $A_{i1},\dots,A_{is}$, pósee $\underline{s}$ columnas independientes (las $\underline{s}$ columnas de B), luego las $\underline{s}$ filas lo son. Se sigue: $r \geq s$.

Ahora bien, siendo r̲ el rango de A, existen r filas $A_1,\dots,A_r$ independientes. La submatriz formada por ellas tiene rango r̲, luego posee r̲ columnas independientes; la submatriz C formada por estas columnas es cuadrada r×r y regular pues su rango es r̲. Se sigue: $r \leq s$. Esta desigualdad y la precedente implican: $r = s$.<>

COROLARIO 7.1: El rango de A es igual al máximo orden de los menores no nulos de A (v. Ejercicio 4).

Es de observar que el Teorema 7 precedente, estaría más lógicamente situado en el párrafo de la Lección 14 dedicado al estudio del rango de una matriz, pero se ha dado aquí para presentarle simultaneamente con el resultado anejo sobre menores no nulos.

LECCION 17

1.PLANO ORDINARIO Y PLANO AFIN.

En el párrafo 1 de la Lección 10 (pg.49) hemos comentado la noción de plano ordinario, y precisado la definición de vector libre de dicho plano, así como la de suma de vectores libres y de producto de un vector libre por un número real.

Se observa que el conjunto de vectores libres del plano ordinario, con dichas dos operaciones, es un espacio vectorial real (es decir, sobre el cuerpo real). Su dimensión es 2, como se deduce inmediatamente de las propiedades del plano ordinario. Por ello, un espacio vectorial de dim.2 se dice tambien plano vectorial.

Pues bien, de entre las propiedades que relacionan el plano ordinario con el de sus vectores libres, interesa destacar las siguientes.

Propiedad 1ª: Dado un punto P y un vector $\underline{v}$, existe un punto Q y solo uno tal que: $\overline{PQ} \in v$.

Indicando con E el conjunto de puntos del plano, y con V el de vectores libres del mismo, se sigue que la aplicación: $E \times V \longrightarrow E$, definida por: $(P,v) \longrightarrow Q$ anterior, es una operación externa en E con dominio de operadores V. Se indica con el mismo signo (+) de la suma en V, pues ello no da lugar a confusión, y tiene sus ventajas.

En resumen: $P + v = Q \iff \overline{PQ} \in v$.

CONVENIO: Se admite que $\overline{PQ}$ represente indistintamente un vector fijo y el vector libre correspondiente. Es una notación cómoda y no produce errores.

Con este convenio se escribe: $P + v = Q \iff \overline{PQ} = v$.

Propiedad 2ª: Dados dos puntos P,Q cualesquiera, existe un vector $\underline{v}$ y solo uno, tal que: $P + v = Q$.

Propiedad 3ª: Dados un punto P y dos vectores $\underline{v},\underline{w}$ cualesquiera, se cumple: $(P + v) + w = P + (v + w)$.

En efecto, esta propiedad equivale a:
$(\forall P,Q,R \in E)\ \overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$.

<u>Propiedad 4ª</u>: El conjunto de puntos de la recta PQ , es:
$\{ P + t.\overline{PQ} \nrightarrow t$ real cualquiera $\}$.

El plano ordinario posee, como se sabe, muchas otras propiedades,pero es interesante observar que <u>todas</u> las que se refieren a intersecciones de rectas, y en general, a posiciones relativas de puntos y rectas (propiedades de <u>incidencia</u> lineal), se obtienen mediante deducciones lógicas, de las cuatro anteriores, y no utilizando de V más que el hecho de ser plano vectorial.

Esto permite afirmar que cualquier conjunto dotado de una ley externa con operadores en un plano vectorial, y que cumpla las propiedades 1ª 2ª y 3ª, es una estructura que tendrá las mismas propiedades de incidencia que el plano ordinario.

Además, que para el estudio de estas propiedades, nos basta partir de las tres citadas, lo cual simplifica y a la vez rigoriza notablemente su estudio.

DEFINICION 1: Se llama <u>plano afin sobre un cuerpo K</u> a un conjunto E dotado de una operación externa (+), cuyo dominio de operadores es un plano vectorial V sobre K, y que cumple:

Axioma 1°) $(\forall P,Q \in E)\ \exists! v \in V \nrightarrow P + v = Q$.

Axioma 2°) $(\forall P \in E)(\forall v,w \in V)\ \ (P + v)+ w = P + (v+w)$.

DEFINICION 2: A los elementos de E se les suele llamar "puntos". Se llama <u>recta</u> de E, a un conjunto de puntos:
$\{ P + tv \nrightarrow P$ fijo, $v \neq \bar{0}$ fijo, t cualquiera$\}$.

Notemos que $\{tv \nrightarrow v \neq \bar{0}$ fijo, t cualquiera$\}$ es un subespacio vectorial S^1 de V, de dimensión 1; se escribe tambien: recta $= P + S^1$. Y a un S^1 se le dice <u>recta vectorial</u>.

Enunciadas las Definiciones 1 y 2, podemos decir que el plano ordinario es un caso particular de plano afin, y que las propiedades de incidencia del plano ordinario se deducen exclusivamente del hecho de ser plano afín.

A partir de ahora, cualquier propiedad del plano afín, debe demostrarse lógicamente arrancando de las Definiciones 1 y 2.

EJERCICIOS:

1. Probar que: $P + \overline{0} = P$, para todo punto P.
2. Probar que: $\overline{QP} = - \overline{PQ}$, para P,Q cualesquiera.

TEOREMA 1: Si el punto Q pertenece a la recta $P + S^1$, se tiene: $Q + S^1 = P + S^1$.

Demostración: Sea $\underline{w}$ un vector cualquiera de S^1. Como $Q = P + v$, con $v \in S^1$, se sigue que:
$Q + w = (P + v) + w = P + (v+w) \in P + S^1$; análogamente, como: $Q + (-v) = P$, se deduce: $P + w \in Q + S^1$. Ya que todo punto de $Q + S^1$ pertenece a $P + S^1$ y viceversa, queda probada la tesis.<>

COROLARIO 1.1: $P + S^1 = Q + T^1 \Rightarrow S^1 = T^1$.

Demostración: Se propone como Ejercicio.

DEFINICION 3: Dos rectas $P + S^1$ y $Q + T^1$ de E, se dicen <u>paralelas</u> si: $S^1 = T^1$.

Se sigue de la definición, que la relación "m paralela a l" es de equivalencia en el conjunto de rectas del plano.

EJERCICIOS:

3. Demostrar que dos rectas paralelas son disjuntas ó coinciden.
4. Probar que por un punto dado pasa una sola recta paralela a una dada.
5. Demostrar que por dos puntos dados (distintos) pasa una sola recta.

2. SISTEMAS DE REFERENCIA. COORDENADAS.

Sea E un plano afín y V su plano vectorial.

TEOREMA 2: Fijado un punto O de E, la aplicación $f: E \longrightarrow V$ dada por: $f(P) = \overline{OP}$, es biyectiva y cumple: $f(P+v) = f(P) + v$.

Demostración: Escribiendo: $f(P) = p$, $f(P+v) = q$, se tiene: $O+p = P$, $O+q = P+v = (O+p) + v = O + (p+v)$, luego: $q = p+v$.

Que f es biyectiva, lo establece el Axioma 1º de la Definición 1. <>

Sea ahora (u_1,u_2) una base dada de V, y $\bar{f}$: $V \longrightarrow K^2$ el sistema coordenado respectivo.

DEFINICION 4: La aplicación biyectiva $\bar{f}.f = g$: $E \longrightarrow K^2$ se llama sistema coordenado de E, respecto del sistema de referencia $(0,u_1,u_2)$.

El punto 0 se dice origen y las rectas $0 + (u_i)$ ejes del sistema en cuestión.

Dado el origen 0, la base (u_i) determina los puntos $A_i = 0 + u_i$ $(i = 1,2)$, y viceversa. Por ello, tambien se llama sistema de referencia de E, al $(0,A_1,A_2)$, y puntos fundamentales del sistema, a los tres precedentes.

Notemos que, reciprocamente, el sistema coordenado g determina el sistema de referencia que lo define, ya que: $g^{-1}(0,0)$ = punto 0, $g^{-1}(1,0) = A_1$, $g^{-1}(0,1) = A_2$.

Una observación interesante es la siguiente:

Sean (p^i) las coordenadas de un punto P, y (q^i) las de uno Q ; entoncés se tiene: $\overline{PQ} = \overline{0Q} - \overline{0P} = q^1u_1 + q^2u_2 - (p^1u_1 + p^2u_2)$ luego las coordenadas de $\overline{PQ}$ en la base (u_i) son $(q^i - p^i)$.

Cambio de coordenadas.

Sean $(0,u_i)$ y $(0',v_j)$ dos sistemas de referencia de E, que dan coordenadas X y $\bar{X}$ respectivamente, de un mismo punto P.

Se tiene: $\overline{0P} = \overline{00'} + \overline{0'P}$; $\overline{0P} = u_1x^1 + u_2x^2 = [u_i]'X$,
$\overline{00'} = u_1p^1 + u_2p^2 = [u_i]'p$, $\overline{0'P} = v_1\bar{x}^1 + v_2\bar{x}^2 = [v_j]'\bar{X}$.

Sea el cambio de base: $[v_j]' = [u_i]'A$. Resulta:

$$[u_i]'X = [u_i]'p + [u_i]'A\bar{X} = [u_i]'(p + A\bar{X})$$

y siendo los (u_i) independientes, se sigue:

$$X = p + A\bar{X} \qquad (1),$$

que es la ecuación matricial del cambio de coordenadas.

Notemos que los datos necesarios para escribir (1) son: las coordenadas p^i de 0' en el sistema X, y las coordenadas de v_1,v_2 en la base (u_i). Claro que estos datos pueden obtenerse a través de otros diversos.

EJERCICIOS:

6. Dado el cambio de coordenadas (1), escribir el cambio inverso, que expresa $\bar{X}$ en función de X.
7. Hallar las ecuaciones (1), conocidas las coordenadas X de los puntos fundamentales del sistema $\bar{X}$.
8. Hallar cambios de coordenadas que tengan como ejes en el sistema $\bar{X}$, rectas dadas.

3. ECUACIONES DE RECTAS. CUESTIONES DE INCIDENCIA.

En lo que sigue, suponemos todo referido a un sistema coordenado fijo, e indicamos con (x,y) las coordenadas de un punto.

Sean $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ dos puntos (distintos) de una recta $\underline{m}$. Entonces, sabemos que los puntos P de m, vienen dados por: $P = P_1 + t.\overline{P_1P_2}$, donde t recorre todo K. Por ello, la ecuación:

$$P = P_1 + tv \qquad (2)$$

se llama ecuación vectorial de la recta m. En esta ecuación, P_1 es un punto de m, y $v = \overline{P_1P_2}$ un vector direccional de m , es decir, una base del S^1 que define.

Expresando (2) en coordenadas, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \end{aligned}\right| \qquad (3)$$

ó tambien:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + tp \\ y &= y_1 + tq \end{aligned}\right| \qquad (4)$$

si escribimos (p,q) como coordenadas de $\underline{v}$.

Las ecuaciones (3) ó (4) se dicen ecuaciones paramétricas de la recta m.

Si un punto $P(x_o,y_o)$ es de la recta m, se sigue inmediatamente que: $(x_o - x_1)q = (y_o - y_1)p$; pero recíprocamente, si se cumple esta última igualdad, el punto (x_o,y_o) es de m, ya que sale de (4) dando a $\underline{t}$ el valor: $(x_o - x_1)/p = (y_o - y_1)/q$. En resumen, un punto P es de m si y solo si sus coordenadas satisfacen a la ecuación:

$$(x - x_1)q = (y - y_1)p \qquad (5)$$

que suponiendo $p, q \neq 0$, se escribe:

$$\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} \qquad (5')$$

y en el caso de ser $v = \overline{P_1P_2}$, se puede escribir:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (6).$$

Cada una de las ecuaciones (5') ó (6) se dice ecuación continua de la recta m; la (5') en función de un punto y un vector direccional, la (6) en función de dos puntos.

Otro modo de escribir la ecuación (6), fácil de recordar, es en forma de determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7).$$

La ecuación (5) se puede escribir: $qx - py - qx_1 + py_1 = 0$, es decir, en la forma:

$$ax + by + c = 0 \qquad (8)$$

que se dice ecuación implícita de la recta m.

NOTA 1: Por ser el vector $\underline{v}$ direccional, distinto de $\bar{0}$, es: p ó $q \neq 0$, y por ello: a ó $b \neq 0$. Se sigue que, recíprocamente, cualquier ecuación del tipo de (5) con p ó $q \neq 0$, ó del tipo de (8) con a ó $b \neq 0$, es la ecuación de una cierta recta.

NOTA 2: El camino seguido para obtener la ecuación (8) nos demuestra, que un vector direccional de la recta correspondiente és el que tiene coordenadas $(-b, a)$, y en general, cualquiera de coordenadas $(-tb, ta)$ con $t \neq 0$.

TEOREMA 3: Si es $ax + by + c = 0$ la ecuación de una recta m, el conjunto de las rectas paralelas a m, viene dado por el conjunto L de ecuaciones $\{ax + by + s = 0 \mid s \text{ arbitrario}\}$.

Demostración: Cualquier ecuación del conjunto L da una recta paralela a m, ya que ambas tienen un vector direccional

$(-b, a)$ común.

Recíprocamente, si es $a'x + b'y + c' = 0$ ecuación implícita de una recta paralela a m, se sigue que: $a' = ta$, $b' = tb$, para un cierto $t \neq 0$ (v. Nota 2), luego dicha recta admite la ecuación: $ax + by + (c'/t) = 0$, que es del conjunto L. <>

TEOREMA 4: El conjunto de las rectas que pasan por un punto $P_1(x_1, y_1)$ dado, viene dado por el conjunto de ecuaciones: $\{ t(x - x_1) + s(y - y_1) = 0 \not\ni t,s$ arbitrarios $\}$.

Demostración: Se propone como Ejercicio.(Ayuda: tener en cuenta como se obtuvo la ecuación (5)).

EJERCICIOS:

9. Hallar la ecuación de una recta paralela a la (8) y que pase por el punto (x_1, y_1).
10. Si (8) se puede escribir en la forma: $x/a + y/b - 1 = 0$, indicar el significado geométrico de estas $\underline{a}$ y $\underline{b}$.
11. Usando las ecuaciones (3) de m, probar que la aplicación: $K \longrightarrow m$ dada por: $t \longrightarrow P$, es biyectiva. El valor de $\underline{t}$ correspondiente a P se llama <u>razón simple</u> (r.s.) de la terna (P, P_2, P_1).
12. Se llama <u>punto medio</u> del par (P_1, P_2) al punto P alineado con ellos, tal que: $\text{r.s.}(PP_2P_1) = \frac{1}{2}$. Hallar ecuaciones de las medianas de un triángulo dado.

4. <u>INTERSECCIONES DE RECTAS. HAZ LINEAL DE RECTAS.</u>

Sean m: $ax+by+c = 0$, y m': $a'x+b'y+c' = 0$ dos rectas cualesquiera, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes, y $MA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

TEOREMA 5: La caracterización de los casos posibles de intersección de m y m', es la siguiente:

1°) un punto $\Leftrightarrow$ rang $M = 2$.

2°) vacía $\Leftrightarrow$ rang $M = 1$ y rang $MA = 2$.

3°) $m = m'$ $\Leftrightarrow$ rang $MA = 1$.

Demostración: Los puntos comunes a m y m' son las soluciones del sistema: $m = 0$, $m' = 0$, luego su obtención se sigue de aplicar el teorema de Rouché-Frobenius.

Como a ó $b \neq 0$ (tambien a' ó $b' \neq 0$), el rang $M \geq 1$, luego asimismo: rang $MA \geq 1$.

1°) rang $M = 2 \Rightarrow$ rang $MA = 2$; y ambos rangos valen 2 si y solo si hay una sola solución.

3°) rang $MA = 1$ $\Leftrightarrow$ el sistema es equivalente a una de las ecuaciones.

2°) rang $M = 1$ y rang $MA = 2$ $\Rightarrow$ no hay solución. El recíproco se sigue por exclusión. <>

COROLARIO 5.1: Si dos rectas son disjuntas, son paralelas. En el caso 1° las rectas se dicen <u>secantes</u>.

DEFINICION 5: Dadas dos rectas m y m' distintas, se llama <u>haz lineal de rectas</u> al conjunto $\{ tm + sm' = 0 \}$ t,s arbitrarios$\}$

TEOREMA 6: Dado un punto $P_1(x_1,y_1)$ no común a m y m', por él pasa una recta y solo una del haz.

Demostración: Escribamos: $ax_1+by_1+c = m_1$, $a'x_1+b'y_1+c' = m_1'$; por hipótesis, m_1 ó $m_1' \neq 0$. Entonces, la recta (t,s) del haz, pasa por P_1 si y solo si cumple: $tm_1 + sm_1' = 0$, es decir, si y solo si: $t/m_1' = s/\!-m_1$, que da la recta única: $m_1'm - m_1m' = 0$.<>

Como por la Definición 5, las rectas m y m' no pueden ser coincidentes, solo pueden darse los dos casos siguientes.

TEOREMA 7: Si m y m' son secantes, el haz correspondiente es el conjunto de rectas que pasan por un punto fijo. Si m y m' son paralelas, el haz es el conjunto de rectas paralelas a m (luego a m').

Demostración: 1°) Si $P_o(x_o,y_o)$ es el punto común, cualquier recta del haz pasa por él, ya que: $tm_o + sm_o' = 0$ para todo (t,s) por ser $m_o = m_o' = 0$. Recíprocamente, cualquier recta l que pase por P_o pertenece al haz, ya que por un punto P_1 de l distinto de P_o pasa una recta del haz (v. Teorema 6), que coincide con l, por tener con ella dos puntos distintos comunes: P_1 y P_o.

2°) Siendo m y m' paralelas, existe un número <u>p</u> tal que: $a' = pa$, $b' = pb$, luego la ecuación del haz puede escribirse: $(t+ps)ax + (t+ps)by + tc+sc' = 0$, locual prueba que cualquier recta del haz es paralela a m. Recíprocamente, cualquier recta l paralela a m pertenece al haz, ya que por un punto P_1 de l pasa una recta del haz, que coincide con l, puesto que ambas pasan por P_1 y son paralelas a m. <>

TEOREMA 8: Sean m_i: $a_i x + b_i y + c_i = 0$ $(i = 1,2,3)$ tres rectas dadas, y MA la matriz $[a_i\ b_i\ c_i]$. Se tiene:

1°) rang MA = 3 <=> las rectas no pertenecen a un mismo haz (se dicen independientes).

2°) rang MA = 2 <=> las rectas pertenecen a un mismo haz pero no coinciden las tres.

3°) rang MA = 1 <=> las tres rectas son una misma.

Demostración: Se propone como Ejercicio.(Ayuda: tener en cuenta que una recta de ecuación $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ pertenece al haz: $tm + sm' = 0$ <=> la terna $(a_1b_1c_1)$ es combinación lineal de las $(a\ b\ c)$ $(a'b'c')$).

Dentro de cada uno de los tres casos del Teorema 8, cabe distinguir diversos subcasos según sean las intersecciones de cada par de rectas. Pero esto se determinará haciendo uso del Teorema 5.

<u>Notemos</u> que la <u>llamada</u> <u>posición relativa</u> de dos rectas, queda definida por su intersección.

EJERCICIOS:

13. Enunciar los diversos subcasos posibles de los casos del Teorema 8, y dibujar las figuras respectivas.
14. Probar que las medianas de un triángulo tienen un punto común (baricentro). Hallar las coordenadas del baricentro en función de las de los vértices.
15. Determinar puntos y rectas que satisfagan a condiciones de incidencia y paralelismo dadas.

5.ORIENTACION EN EL PLANO AFIN REAL.

Recordemos que una terna (A,B,C) de objetos es el conjunto de los tres con una ordenación total. Así resulta que dicho conjunto da lugar a seis ternas distintas.

En este párrafo, consideramos todo en el plano afin real.

DEFINICION 6: Sean ABC y A'B'C' dos ternas de puntos no alineados. Se dice que ambas tienen la misma orientación , si así sucede con los pares de vectores $(\overline{AB},\overline{AC})$ y $(\overline{A'B'},\overline{A'C'})$.

TEOREMA 9: Si ABC es una terna de puntos no alineados, los pares de vectores $(\overline{AB},\overline{AC})$ $(\overline{BC},\overline{BA})$ $(\overline{CA},\overline{CB})$ tienen la misma orientación.

Demostración: Fijado un sistema coordenado $X = (x_1,x_2)$, queda definida una función determinante H sobre el plano vectorial, mediante: $\dot{H}(v,v') = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}$.

Si las coordenadas respectivas de A,B,C son: (a_1,a_2) (b_1,b_2) (c_1,c_2) , se tiene:

$$\text{sig } H(\overline{AB},\overline{AC}) = \text{sig}\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 \end{vmatrix} = \text{sig}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

y análogamente:

$$\text{sig } H(\overline{BC},\overline{BA}) = \text{sig}\begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \\ 1 & a_1 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \text{sig } H(CA,CB) = \text{sig}\begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_2 \\ 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Pero como los determinantes 3×3 obtenidos son iguales, por ser las permutaciones (abc) (bca) (cab) de la misma clase, queda demostrado el teorema. <>

COROLARIO 9.1: Las ternas ABC, BCA y CAB tienen la misma orientación, contraria a la de las ternas BAC, ACB y CBA

DEFINICION 7: Se llama triángulo orientado a un triángulo dotado de la orientación dada por una terna formada con sus vértices.

De lo anterior se sigue que el triángulo orientado ABC , es el mismo BCA y el CAB. En cambio el triángulo orientado ABC es distinto del BAC, etc.

Lo expuesto en este párrafo puede aplicarse al plano ordinario, por ser un plano afin real.

LECCION 18

1.ESPACIO ORDINARIO Y ESPACIO AFIN.

La mayor parte de lo expuesto en el párrafo 1 de la Lección 17 (Plano ordinario y plano afin), puede repetirse tomando como punto de partida el espacio ordinario.

El conjunto de los vectores libres del espacio ordinario, con las operaciones suma y producto por un número real, es claramente un espacio vectorial real de dimensión 3, como se deduce de las propiedades admitidas para dicho espacio ordinario.

La diferencia con un plano vectorial de vectores libres, estriba pues en la dimensión, pero no en la estructura, que es la de espacio vectorial. Por ello, lo que exponemos a continuación es casi igual a lo dado en el párrafo 1 mencionado.

Entre las propiedades que relacionan el espacio ordinario con el de sus vectores libres, interesa destacar las siguientes:

Propiedad 1^a: La misma que en el plano (v. pg.109). Basta cambiar la palabra plano por espacio.

Propiedades 2^a, 3^a y 4^a: Las mismas que en el plano.

Propiedad 5^a: Dados tres puntos P,Q,R no alineados, el conjunto de puntos del plano PQR es: $\{P + t.\overline{PQ} + s.\overline{PR} \}$ t,s reales cualesquiera $\}$.

El espacio ordinario posee otras muchas, pero es importante observar que todas las que se refieren a posiciones relativas de puntos, rectas y planos, se obtienen lógicamente a partir de las 5 anteriores, y no utilizando de V más que el hecho de ser espacio vectorial de dimensión 3.

Esto permite afirmar que cualquier conjunto dotado de una ley externa con operadores en un espacio vectorial de dimensión 3, y que cumpla las propiedades 1ª, 2ª y 3ª precedentes, es una estructura que tendrá las mismas propiedades lineales que el espacio ordinario.

Además, que para el estudio de estas propiedades, nos basta partir de las tres citadas, con ventaja indudable para la sencillez y el rigor lógico.

En lo que sigue de la Lección, cuando digamos espacio, se entenderá de dimensión 3.

Pero es de notar que mucho de lo que sigue conserva su validez, ó es fácilmente generalizable, en el caso de dimensión <u>n</u>.

DEFINICION 1: Se llama <u>espacio afin sobre un cuerpo K</u>, a un conjunto E dotado de una operación externa (+), cuyo dominio de operadores es un espacio vectorial V sobre K, y que cumple: Axiomas 1°) y 2°) Los mismos que en el plano (v. pg.110).

DEFINICION 2: La misma que en el plano, y además:

Se llama <u>plano</u> de E, a un conjunto de puntos $\{P + tv + sw \mid P$ fijo, (v,w) fijos independientes, (t,s) escalares arbitrarios $\}$.

Notemos que $\{tv + sw \mid (v,w)$ fijos independientes, (t,s) cualesquiera$\}$ es un subespacio vectorial S^2 de V, de dimensión dos, es decir, un plano vectorial. Por ello, se escribe también: plano $= P + S^2$.

Si escribimos: $P + S$, indicamos una recta ó un plano, ya que S representa normalmente un subespacio de V, de dimensión 1 ó 2. Por ello, las figuras recta ó plano reciben el nombre común de <u>subespacio afin</u> ó <u>variedad lineal</u> (afin) de E.

EJERCICIOS:

1 y 2. Los mismos que en el plano (v. pg.111).

TEOREMA 1: Si el punto Q pertenece a la variedad lineal $P + S$, se tiene: $Q + S = P + S$.

Demostración: La misma del Teorema 1 de la Lección 17.

COROLARIO 1.1: $P + S = Q + T \Rightarrow S = T$.

Demostración: Se propone como Ejercicio.

DEFINICION 3: Dos rectas $P + S^1$ y $Q + T^1$ de E se dicen paralelas si: $S^1 = T^1$. Una recta $P+S^1$ y un plano $Q+S^2$ se dicen paralelos si: $S^1 \subset S^2$. Dos planos $P+S^2$ y $Q+\bar{S}^2$ se dicen paralelos si: $S^2 = \bar{S}^2$.

EJERCICIOS:

3, 4 y 5. Los mismos que en el plano (v. pg.111).

6. Demostrar que una recta y un plano paralelos, ó son disjuntos, ó la recta está contenida en el plano.
7. Probar que dos planos paralelos son disjuntos ó coinciden.
8. Demostrar que por tres puntos no alineados pasa un solo plano.

2.SISTEMAS DE REFERENCIA. COORDENADAS.

Sea E un espacio afín y V su espacio vectorial.

TEOREMA 2: El mismo que en el plano (pg.111).

Sea ahora (u_1, u_2, u_3) una base dada de V, y $\bar{f}: V \longrightarrow K^3$ el sistema coordenado respectivo.

DEFINICION 4: La misma que en el plano (pg.112), cambiando dimensión 2 por dim.3.

El resto del párrafo 2 de la Lección 17, es aprovechable ahora, sin más que hacer $(i = 1,2,3)$ en vez de $(i = 1,2)$.

Solamente procede añadir, que dado un sistema de referencia (O, u_1, u_2, u_3), los tres planos: $O + tu_1 + su_2$, etc., se dicen planos coordenados del sistema.

3.ECUACIONES DE PLANOS.

En lo que sigue de la Lección, suponemos todo referido a un sistema coordenado fijo, e indicamos con (x,y,z) las coordenadas de un punto.

Sean $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ y $P_3(x_3,y_3,z_3)$ tres puntos de un plano α, no alineados. Entonces, por definición de plano, sabemos que los puntos P de α vienen dados por:

$$P = P_1 + tv + sw \qquad (1)$$

donde: $v = \overline{P_1P_2}$, $w = \overline{P_1P_3}$, y (t,s) recorre todo K^2. Por ello, la (1) se dice <u>ecuación vectorial</u> del plano α. En la cual, notemos que P_1 es un punto de α y (v,w) una <u>base direccional</u> de α, es decir, una base del S^2 que define.

Expresando (1) en coordenadas, se tiene:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) + s(x_3 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1) + s(y_3 - y_1) \\ z &= z_1 + t(z_2 - z_1) + s(z_3 - z_1) \end{aligned} \qquad (2)$$

ó tambien:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + tp_1 + sp_2 \\ y &= y_1 + tq_1 + sq_2 \\ z &= z_1 + tr_1 + sr_2 \end{aligned} \qquad (3)$$

si indicamos con (p_1, q_1, r_1) las coordenadas de $\bar{v}$, y con (p_2, q_2, r_2) las de $\underline{w}$.

Las ecuaciones (2) ó (3) se dicen <u>ecuaciones paramétricas</u> del plano α.

Como v,w son independientes, un punto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ es del plano α, si y solo si: rang $(\overline{P_1P_o}, v, w) = 2$, ó sea, si y solo si:

$$\begin{vmatrix} x_o - x_1 & p_1 & p_2 \\ y_o - y_1 & q_1 & q_2 \\ z_o - z_1 & r_1 & r_2 \end{vmatrix} = 0$$

es decir, si y solo si sus coordenadas satisfacen a la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & p_1 & p_2 \\ y - y_1 & q_1 & q_2 \\ z - z_1 & r_1 & r_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4).$$

Sustituyendo en (4): $p_1 = x_2 - x_1$, $p_2 = x_3 - x_1$, etc., queda una expresión que puede escribirse en la forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5).$$

Desarrollando (4) por los elementos de la primera columna, queda: $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$, donde:

$$a = \begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}, \; b = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix}, \; c = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \qquad (6),$$

que puede escribirse:

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (7).$$

Esta (7) se dice <u>ecuación implicita</u> del plano α ; las (4) y ~~(6)~~ (5) tambien son ecuaciones implicitas en forma de determinante.

<u>Notemos</u> que en (7), al menos uno de los coeficientes a,b,c es distinto de cero, ya que: $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{bmatrix} = 2$, por ser independientes los vectores v, w.

Reciprocamente, se tiene:

TEOREMA 3: Una ecuación lineal $ax + by + cz + d = 0$, es la ecuación implicita de un cierto plano, si uno de los coeficientes a,b,c es no nulo.

Demostración: Suponiendo por ejemplo: $c \neq 0$, escribamos:

$$x = t \;\; , \;\; y = s \;\; , \;\; z = -d/c - t(a/c) - s(b/c) \; .$$

Estas son las ecuaciones paramétricas de un plano, ya que las ternas $(1,0,-a/c)$ y $(0,1,-b/c)$ son claramente independientes. Y es inmediato comprobar que este plano admite como ecuación implicita la dada. <>

COROLARIO 3.1: Sea $ax+by+cz+d = 0$ la ecuación de un plano α, y $c \neq 0$. Entonces, las ternas $(c,0,-a)$ $(0,c,-b)$ constituyen una base direccional de α.

TEOREMA 4: Sea $ax+by+cz+d = 0$ la ecuación de un plano α. Entonces, la terna (p,q,r) es coordenada de un vector del espacio S^2 <u>direccional</u> de α , si y solo si: $ap + bq + cr = 0$.

Demostración: De las igualdades (6) se sigue que (p,q,r) es coordenada de un vector de S^2, si y solo si:

$$\begin{vmatrix} p & p_1 & p_2 \\ q & q_1 & q_2 \\ r & r_1 & r_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ ó sea: } ap + bq + cr = 0 \; ,$$

desarrollando por los elementos de la primera columna. <>

COROLARIO 4.1: El plano de ecuación $a'x+b'y+c'z+d' = 0$ es paralelo al de ecuación (7), si y solo si: (a',b',c') es proporcional a (a,b,c).

EJERCICIOS:

9. Determinar para qué valores de (a,b,c) el plano deecuación $ax+by+cz+d = 0$ es: 1°) paralelo al plano coordenado $0\ A_1A_2$; 2°) paralelo al eje $0A_3$; 3°) no paralelo a ningún eje.
10. Hallar la ecuación de un plano paralelo a (7) y que pase por el punto (x_1,y_1,z_1).
11. Si (7) se puede escribir en la forma: $x/a + y/b + z/c -1= 0$ indicar el significado geométrico de estos $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.

4.ECUACIONES DE RECTAS.

Sean $P_1(x_1,y_1,z_1)$ y $P_2(x_2,y_2,z_2)$ dos puntos (distintos) de una recta m. Por definición de recta, una <u>ecuación vectorial</u> de m es (v. pg.113):

$$P = P_1 + tv \qquad (8)$$

donde: $v = \overline{P_1P_2}$ y $\underline{t}$ escalar arbitrario. El vector $\underline{v}$ es un <u>vector direccional</u> de m, base del S^1 que define.

Expresando (8) en coordenadas se tiene:

$$\left|\begin{array}{l} x = x_1 + t(x_2-x_1) \\ y = y_1 + t(y_2-y_1) \\ z = z_1 + t(z_2-z_1) \end{array}\right. \quad (9) \text{ , ó tambien: } \left|\begin{array}{l} x = x_1 + tp \\ y = y_1 + tq \\ z = z_1 + tr \end{array}\right. \quad (10)$$

si indicamos con (p,q,r) las coordenadas de $\underline{v}$.

Las ecuaciones (9) ó (10) se dicen <u>ecuaciones paramétricas</u> de la recta m.

De (8) se sigue que un punto $P(x,y,z)$ es de la recta, si y solo si: $\overline{P_1P} = tv$, ó sea, si y solo si:

$$\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r} \qquad (11),$$

por lo cual, los puntos de m son aquellos cuyas coordenadas satisfacen al sistema (11), que se dice: ecuaciones de m en <u>forma continua</u>.

Sustituyendo: $p = x_2 - x_1$, etc., se tiene:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (12)$$

ecuaciones en <u>forma continua</u> de la recta, en función de los puntos P_1 y P_2 .

Como $v \neq \bar{0}$, una de sus coordenadas p,q,r es distinta de cero, por lo que el sistema (11) tiene siempre sentido. Si por ejemplo es $p \neq 0$, el sistema puede escribirse así:

$$\begin{matrix} q(x - x_1) = p(y - y_1) \\ r(x - x_1) = p(z - z_1) \end{matrix} \quad \text{ó sea:} \quad \begin{matrix} ax + by + d = 0 \\ a'x + c'z + d' = 0 \end{matrix} \qquad (13).$$

En general, si un sistema del tipo:

$$\begin{matrix} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{matrix} \qquad (14),$$

tiene por soluciones los puntos de una recta m, las (14) se dicen <u>ecuaciones implícitas</u> de m.

TEOREMA 5: Un sistema (14) es el de ecuaciones implícitas de una cierta recta, si y solo si: $\text{rang} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$.

Demostración: =>) Si (14) representa una recta, sea (x_1, y_1, z_1) un punto de ella; como dicha terna es solución de (14), este sistema puede escribirse así:

$$\begin{matrix} a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 \\ a'(x - x_1) + b'(y - y_1) + c'(z - z_1) = 0 \end{matrix} \qquad (15).$$

Pongamos $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = M$. Si rang $M = 1$, este sistema es equivalente a una sola de las ecuaciones, cuyo conjunto de soluciones es un plano, contra la hipótesis; se concluye: rang $M = 2$.

<=) Si rang $M = 2$, el sistema (14) tiene soluciones, como prueba el teorema de Rouché-Frobenius; sea (x_1, y_1, z_1) una de ellas. Entonces, el sistema (14) puede escribirse en la forma (15), y siendo rang $M = 2$, el sistema (15) es equivalente al

$$\frac{x - x_1}{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}} = \frac{y - y_1}{\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}} = \frac{z - z_1}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \qquad (16),$$

que son las ecuaciones de una recta en forma continua. <>

COROLARIO 5.1: Si las ecuaciones (14) son implícitas de una recta m, un vector direccional de m es aquel cuyas coordenadas son los denominadores de (16).

EJERCICIOS:

12. Hallar las ecuaciones de una recta paralela a la (14) y que pase por el punto (x_0,y_0,z_0).
13. Hallar un vector direccional de una recta paralela a dos planos dados.

5. INTERSECCIONES DE PLANOS. HAZ LINEAL DE PLANOS.

Sean α: $ax+by+cz+d = 0$, α': $a'x+b'y+c'z+d'= 0$ dos planos cualesquiera, M la matriz de los coeficientes, y $MA=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

TEOREMA 6: La caracterización de los casos posibles de intersección de α y α', es la siguiente:

1°) una recta $\Leftrightarrow$ rang M = 2.

2°) vacía $\Leftrightarrow$ rang M = 1 y rang MA = 2.

3°) $\alpha = \alpha'$ $\Leftrightarrow$ rang MA = 1.

Demostración: Los puntos comunes a α y α' son las soluciones del sistema (14), luego su obtención se sigue de aplicar el teorema de Rouché-Frobenius.

Notemos que: rang M $\geq$ 1 , luego tambien: rang MA $\geq$ 1.

1°) Se trata de lo demostrado en el Teorema 5.

3°) rang MA = 1 $\Leftrightarrow$ el sistema equivale a una de las ecuaciones.

2°) $\Leftarrow$ se sigue del teorema de Rouché-Frobenius; $\Rightarrow$ se sigue por exclusión. <>

COROLARIO 6.1: Si dos planos son disjuntos, son paralelos. En el caso 1°) los planos se dicen secantes.

DEFINICION 5: Dados dos planos α y α' distintos, se llama haz lineal de planos al conjunto $\{t\alpha + s\alpha'=0 \mid t,s \text{ arbitrarios}\}$.

TEOREMA 7: Dado un punto $P(x_1,y_1,z_1)$ no común a α y α', por él pasa un plano y solo uno del haz.

Demostración: Se propone como Ejercicio.(Es análoga a la del Teorema 6 de la Lección 17).

Existen dos tipos de haces de planos, que concreta el teorema siguiente.

TEOREMA 8: Si los planos α,α' son secantes, el haz correspondiente es el conjunto de los planos que pasan por una recta fija. Si α,α' son paralelos, el haz es el conjunto de los planos paralelos a α (luego a α').

Demostración: Se propone como Ejercicio.(Ayuda: seguir un camino análogo al del Teorema 7 de la Lección 17, y tener en cuenta que por una recta y un punto exterior a ella pasa un solo plano).

TEOREMA 9: Sean α_i: $a_ix + b_iy + c_iz + d_i = 0$ (i= 1,2,3) tres planos dados, M la matriz $[a_i\ b_i\ c_i]$ y MA la matriz ampliada $[a_i\ b_i\ c_i\ d_i]$. Se tiene:

1°) rang M = 3 <=> su intersección es un punto.

2°) rang M = 2 y rang MA = 3 <=> no tienen punto común y no pertenecen a un mismo haz.

3°) rang M = rang MA = 2 <=> su intersección es una recta.

4°) rang M = 1 y rang MA = 2 <=> los planos son paralelos pero no coincidentes.

5°) rang M = rang MA = 1 <=> los tres planos coinciden.

Demostración: Se propone como Ejercicio.(Ayuda: análoga a la indicada en el Teorema 8 de la Lección 17, pg.117).

Dentro de cada uno de los cinco casos del Teorema precedente, cabe distinguir diversos subcasos según sean las intersecciones de cada par de planos. Estas se pueden determinar utilizando los resultados del Teorema 6.

Notemos que la llamada posición relativa de rectas ó planos, queda definida por su intersección.

EJERCICIOS:

14. Enunciar los diversos subcasos posibles de los casos del Teorema 9, y dibujar las figuras correspondientes.

15. Si son $\alpha_1\alpha_2$ dos planos (distintos) del haz $t\alpha + s\alpha'$, comprobar que el haz $t\alpha_1 + s\alpha_2$ es el mismo anterior.
16. Demostrar que el conjunto de todos los planos que pasan por un punto $P(x_1,y_1,z_1)$ dado, corresponde al conjunto de ecuaciones $[t(x-x_1)+ s(y-y_1)+ u(z-z_1)= 0 \nmid t,s,u$ arbitrarios$]$.
17. Determinar puntos y planos que satisfagan a condiciones de incidencia y paralelismo dados.

6. POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS.

Sea m una recta dada por ecuaciones implícitas: $a_ix + b_iy + c_iz + d_i=0$ $(i = 1,2)$, es decir, como intersección de dos planos $\alpha_1\alpha_2$. Y sea α: $ax + by + cz + d = 0$, un plano dado.

Entonces, la intersección de m y α es la intersección de los tres planos $\alpha_1\alpha_2\alpha$. Aplicando pues el Teorema 9 precedente, y teniendo en cuenta que: rang $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix} = 2$, resulta:

TEOREMA 10: La intersección de la recta y el plano anteriores, presenta tres posibilidades:

1°) rang M = 3 <=> la intersección es un punto.

2°) rang M = 2 y rang MA = 3 <=> la intersección es vacía y la recta es paralela al plano.

3°) rang M = rang MA = 2 <=> la recta está contenida en el plano.

Demostración: Basta aplicar el Teorema 9, haciendo $\alpha_3 = \alpha$ y notando que ahora, rang M $\geq$ 2. <>

En el caso de que m venga dada por ecuaciones paramétricas (10) ó en forma continua (11), es inmediato observar que los puntos comunes a m y α, vienen dados por los valores de $\underline{t}$ que satisfagan a la ecuación:

$$a(x_1+ tp)+ b(y_1+ tq)+ c(z_1+ tr)+ d = 0 ,$$

y por lo tanto, los tres casos posibles (Teorema 10) vienen ahora caracterizados del modo siguiente:

1°) $ap + bq + cr \neq 0$.

2°) $ap + bq + cr = 0$ y $ax_1 + by_1 + cz_1 + d \neq 0$.

3°) $ap + bq + cr = 0$ y $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$.

Posiciones relativas de dos rectas.

Como de costumbre, indiquemos con α_i el plano de ecuación $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$, y tambien el primer miembro de esa ecuación.

TEOREMA 11: La posición relativa de dos rectas l,m dadas por las ecuaciones implicitas: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ para l, y: $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 0$ para m, viene caracterizada como sigue:

1°) rang $[a_i \ b_i \ c_i \ d_i] < 4$ <=> las rectas son coplanarias.

2°) rang $[a_i \ b_i \ c_i \ d_i] = 4$ <=> las rectas se cruzan.

Demostración: Que el rango sea menor que 4, equivale a que las filas son dependientes, es decir, a que se tiene:

$t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + t_3\alpha_3 + t_4\alpha_4 = 0$ con algún $t_j \neq 0$.

Si escribimos: $\alpha = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 = -t_3\alpha_3 - t_4\alpha_4$, observamos que la igualdad anterior expresa que existe un plano $\underline{\alpha}$ que pertenece a los haces (α_1, α_2) y (α_3, α_4), ó sea, que contiene a las rectas l y m (v. Teorema 8, 1°). En definitiva, dicha igualdad expresa que las rectas l y m son coplanarias.

2°) Se cumple por exclusión.

Conviene añadir que, en el caso 1°), el sistema de las cuatro ecuaciones $\alpha_i = 0$, es equivalente al formado por tres de ellas, y aplicando el Teorema 10 se distinguirán los tres subcasos posibles (rectas secantes, paralelas disjuntas ó coincidentes). <>

Si las dos rectas vienen dadas por ecuaciones paramétricas ó en forma continua, escribamoslas con notación vectorial; l: $P + tv$, m: $Q + sw$.

TEOREMA 12: La posición relativa de dos rectas l,m dadas por las ecuaciones paramétricas precedentes, viene definida como sigue:

1°) rang $(\overline{PQ}, v, w) = 3 \iff$ las rectas se cruzan.

2°) rang $(\overline{PQ}, v, w) = \text{rang}\,(v,w) = 2 \iff$ rectas secantes.

3°) rang $(\overline{PQ}, v, w) = 2$ y rang $(v,w) = 1 \iff$ rectas paralelas distintas.

4°) rang $(\overline{PQ}, v, w) = 1 \iff$ las rectas coinciden.

Demostración: Se propone como Ejercicio.(Ayuda: dibujar la figura correspondiente).

EJERCICIOS:

18. Dadas las ecuaciones de cuatro planos α_i, determinar condiciones necesarias y suficientes para que tengan un punto común.
19. Determinar puntos, rectas y planos que cumplan condiciones de incidencia y paralelismo dados.

7.ORIENTACION EN EL ESPACIO AFIN REAL.

La ampliación de lo expuesto en el párrafo 5 de la Lección 17 (Orientación en el plano afin real), al caso del espacio afin real, es tan simple, que nos limitaremos a repetir aquello, con los cambios necesarios de nomenclatura.

DEFINICION 6: Sean ABCD y A'B'C'D' dos cuaternas de puntos no coplanarios. Se dice que ambas poseen la misma orientación, si así sucede con las ternas de vectores $(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD})$ y $(\overline{A'B'},\overline{A'C'},\overline{A'D'})$.

TEOREMA 13: Si ABCD es una cuaterna de puntos no coplanarios, los trivectores $(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD})$ $(\overline{BC},\overline{BD},\overline{BA})$ $(\overline{CA},\overline{CB},\overline{CD})$ y $(\overline{DA},\overline{DB},\overline{DC})$ tienen la misma orientación.

Demostración: Fijado un sistema coordenado $X = (x_1,x_2,x_3)$ queda definida una función determinante H sobre el espacio vectorial correspondiente, mediante:

$$H(v,v',v'') = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix}$$

Si las coordenadas respectivas de A,B,C,D son: (a_1,a_2,a_3),

$,b_1,b_2,b_3)$, etc., se tiene:

$$\text{sig } H(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}) = \text{sig}\begin{vmatrix} b_i - a_i \\ c_i - a_i \\ d_i - a_i \end{vmatrix} = \text{sig}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

y análogamente se obtienen: sig $H(\overline{BC},\overline{BD},\overline{BA})$, etc.. Pero como los determinantes 4×4 obtenidos son iguales, por ser las permutaciones (abcd) (bcda) (cabd) y (dabc) de la misma clase, queda probada la tesis. <>

COROLARIO 13.1: Si indicamos con $\alpha(ABCD)$ la cuaterna imagen de la permutación $\underline{\alpha}$, se tiene: la orientación de $\alpha(ABCD)$ es igual ó contraria a la de ABCD según que: sig $\alpha = 1$ ó -1.

DEFINICION 7: Se llama <u>tetraedro orientado</u> a un tetraedro dotado de la orientación dada por una cuaterna formada con sus vértices.

Se sigue de lo anterior que el tetraedro orientado ABCD , es el mismo BCDA, y distinto del BACD, etc..

Lo expuesto en el presente párrafo puede aplicarse al espacio ordinario, por tratarse de un espacio afín real.

<u>LECCION 19</u>

<u>1.CUERPO ORDENADO</u>.

La relación de orden total que posee el cuerpo real, da origen a una estructura más rica que la de cuerpo, cuya definición precisamos a continuación.

DEFINICION 1: Un <u>cuerpo ordenado</u> es un cuerpo K dotado de una relación de orden $\leq$, que cumple:

1°) $(\forall c \in K)\ a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$.

2°) $0 \leq a$ y $0 \leq b \Rightarrow 0 \leq ab$.

Si el orden es total, la estructura se dice <u>cuerpo totalmente ordenado</u>. En este caso, los elementos $a > 0$ se dicen positivos, y los $b < 0$ negativos.

EJERCICIOS:

1. Probar que un cuerpo totalmente ordenado tiene característica cero.
2. Demostrar que en un cuerpo totalmente ordenado, el producto de dos números del mismo signo (es decir, ambos positivos ó ambos negativos) es positivo, y de signo contrario es negativo.

Un plano afin sobre un cuerpo totalmente ordenado, posee además de las propiedades de cualquier plano afin, otras debidas a la estructura de orden, que se llaman tradicionalmente propiedades de separación. Vamos a estudiar algunas de ellas en el plano real, pero se comprende que son válidas para cualquier otro cuerpo totalmente ordenado, como por ejemplo, el racional.

2. SEGMENTOS EN EL PLANO O ESPACIO AFIN REAL.

La conocida noción de segmento es propia de la estructura de plano ó espacio sobre un cuerpo totalmente ordenado, ya que implica la existencia del concepto de intervalo (v. pg.15, Def. 14).

Sea E un plano ó espacio afin real.

DEFINICION 2: Dados dos puntos P,Q de E, se llama segmento de extremos P y Q, al conjunto de puntos $\{P + t\overline{PQ} \nmid t \in [0,1]\}$.

Tambien se dice que es el conjunto de puntos de la recta PQ, situados entre P y Q. Los puntos de la recta contenidos en el segmento y distintos de los extremos, se dicen interiores al segmento; los demás se dicen exteriores.

DEFINICION 3: Sean A,B,P,Q cuatro puntos de una recta. Entonces, se dice que los puntos A y B están separados por los P y Q, cuando uno es interior y otro exterior al segmento PQ.

Coordenadas baricéntricas.

Fijado un origen de coordenadas O, escribamos: $\overline{OP} = p$,

$\overline{OQ} = q$, $\overline{OX} = x$. Una ecuación vectorial de la recta PQ, es entonces: $x = p + t(q - p)$, ó sea: $x = (1-t)p + tq$, que se puede escribir:

$$x = sp + tq \quad (s + t = 1) \qquad (1).$$

Cada par (s,t) tal que: $s+t = 1$, da un punto X de la recta, el cual a su vez determina unívocamente el par (s,t) que cumple (1).

DEFINICION 4: Los números s,t anteriores, se dicen <u>coordenadas baricéntricas</u> del punto X respecto del par de puntos (P,Q).

<u>Notemos</u> que es esencial el orden de los puntos P,Q, ya que respecto del par (Q,P) las coordenadas baricéntricas de X son $(t,s) \neq (s,t)$ en general.

TEOREMA 1: El punto A de la recta PQ es interior al segmento PQ, si y solo si sus coordenadas baricéntricas son positivas.

Demostración: En efecto, A es interior $\Leftrightarrow 0 < t_A < 1 \Leftrightarrow t_A > 0$ y $1-t_A > 0$. <>

Recordemos que t_A se dice tambien <u>razón simple</u> de la terna (AQP), y se escribe: r.s.(AQP).

TEOREMA 2: Si (s,t) son las coordenadas baricéntricas de A respecto de (P,Q), se tiene: r.s.(PQA) = $- t/s$.

Demostración: Poniendo $\overline{OA} = a$, resulta: $a = sp + tq$, $sa + ta = sp + tq$, $p = a - \frac{t}{s}(q - a)$. <>

COROLARIO 2.1: El punto A es interior al segmento PQ, si y solo si: r.s.(PQA) < 0.

<u>Notemos</u> que, tomando coordenadas en cualquiera de las igualdades vectoriales anteriores, se obtienen igualdades análogas en las coordenadas. Por ejemplo, si $P(x_1,y_1)$ $Q(x_2,y_2)$ $A(x,y)$, se tiene:

$$-\frac{t}{s} = \frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \frac{y_1 - y}{y_2 - y} .$$

EJERCICIOS:

3. Se llama <u>razón doble</u> de la cuaterna de puntos alineados (ABCD) al cociente: r.s.(ABC)/r.s.(ABD) ; la indicaremos: r.d.(ABCD). Probar que los puntos C,D están separados por los A,B, si y solo si: r.d.(ABCD) < 0.
4. Demostrar que los puntos C,D están separados por los A,B si y solo si se cumple el recíproco.

3. SEMIPLANOS Y REGIONES CONVEXAS DEL PLANO AFIN REAL.

Sea E un plano afín real, referido a un sistema coordenado fijo. Si $ax+by+c = 0$ es la ecuación de una recta m, sean los conjuntos: $E' = \{P(x,y) \ni ax+by+c \geq 0\}$, $E'' = \{P(x,y) \ni ax+by+c \leq 0\}$. Es evidente que: $E' \cup E''$ = plano total , y que: $E' \cap E''$ = recta m.

DEFINICION 5: Cada una de las regiones E' y E" precedentes se llama <u>semiplano</u> cuyo <u>borde</u> es la recta m.

TEOREMA 3: Dada una ecuación implícita de la recta m: $ax + by + c = 0$, y dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ $P_2(x_2,y_2)$ del plano, sucede uno de estos casos:

1°) P_1 y P_2 están en un mismo semiplano; entonces, todo el segmento P_1P_2 pertenece a dicho semiplano.

2°) P_1 y P_2 están en distinto semiplano; entonces el segmento P_1P_2 corta a la recta m en un solo punto interior al segmento.

Demostración: Las coordenadas de un punto P(x,y) del segmento P_1P_2 son: $\left| \begin{array}{l} x = sx_1 + tx_2 \\ y = sy_1 + ty_2 \end{array} \right.$ $(s \geq 0,\ t \geq 0,\ s+t = 1)$.

Se sigue: $ax+by+c = s(ax_1+by_1+c) + t(ax_2+by_2+c) = sm_1 + tm_2$.

1°) Si $m_1 \geq 0$ y $m_2 \geq 0$ $\Rightarrow$ $sm_1+tm_2 \geq 0$, luego P(x,y) está siempre en el semiplano E'. Analogamente, si $m_1 \leq 0$ y $m_2 \leq 0$, P está siempre en E".

2°) Si $m_1m_2 < 0$ $\Rightarrow$ $sm_1+tm_2=0$ es una ecuación con solución única: $-t/s = m_1/m_2 < 0$, que da un punto interior al segmento (v. Corolario 2.1). <>

En el 2° caso precedente, se dice que los puntos P_1P_2 están separados por la recta m.

El apartado 1° de este Teorema expresa una propiedad de los semiplanos, que se conoce con el nombre general de convexidad.

DEFINICION 6: Una región convexa del plano E, es una parte F de E que tiene la siguiente propiedad: si dos puntos P,Q pertenecen a F, todo el segmento PQ pertenece a F.

TEOREMA 4: La intersección de una familia arbitraria de regiones convexas es una region convexa.

Demostración: Se propone como Ejercicio.

La región convexa más sencilla es sin duda el semiplano. Le sigue la intersección de dos semiplanos, ó región angular. Pero el ejemplo más interesante es el siguiente.

TEOREMA 5: Sean $P_1,\dots,P_n$ un número finito de puntos, y escribamos: $\overline{OP}_i = p_i$, $\overline{OX} = x$. Entonces, el conjunto:
$F = \{ X \mid x = t_1p_1+\dots+t_np_n \ , \ t_1+\dots+t_n = 1 \ , \ t_i \geq 0 \}$
es una región convexa, que se llama simplex definido por los n puntos dados.

Demostración: Sean P y Q dos puntos de F, $\overline{OP} = p$, $\overline{OQ} = q$. Se tiene: $p = \Sigma\, t_ip_i$, $q = \Sigma\, s_ip_i$. Un punto cualquiera del segmento PQ es A tal que: $\overline{OA} = a = sp + tq$ $(s+t = 1)$. $s\geq 0, t\geq 0$

Se sigue: $a = s\,\Sigma\, t_ip_i + t\,\Sigma\, s_ip_i = \Sigma(st_i+ts_i)p_i$; pero: $\Sigma(st_i+ts_i) = s\,\Sigma\, t_i + t\,\Sigma\, s_i = s.1 + t.1 = s+t = 1$; por lo tanto, A pertenece a F. <>

El simplex definido por tres puntos puede tambien obtenerse como intersección de tres semiplanos: es la región de puntos interiores a un triángulo. Analogamente, para $n = 4,5,\dots,n$, se tienen las regiones de puntos interiores a un cuadrilátero, un pentágono convexo, ... , un poligono convexo de n lados.

EJERCICIOS:

5. Dibujar regiones convexas del plano, definidas por sistemas de inecuaciones: $a_ix + b_iy + c_i \geq 0$.

6. Probar que si F es una región convexa de E, P_1 un punto de F y P_2 uno exterior a F, existe un punto P del segmento P_1P_2 tal que: el P_1P es segmento contenido en F, y el PP_2 tiene todos sus puntos exteriores a F, excepto P.

4. ~~SEMIPLANOS~~ ESPACIOS Y REGIONES CONVEXAS DEL ESPACIO AFIN REAL.

Los conceptos, definiciones y demostraciones del párrafo anterior podían haberse dado simultaneamente para el plano y el espacio, lo cual no se ha hecho por razones pedagógicas. Ahora bien, una vez comprendido lo anterior, su traducción al caso del espacio es tan sencilla, que parece adecuado realizarla como Ejercicio.

Nos limitaremos a mencionar las diferencias de forma más evidentes.

En vez de recta: $ax+by+c=0 \longrightarrow$ plano: $ax+by+cz+d=0$.

Semiplano ⟶ semiespacio.

Región angular ⟶ Región diédrica.

Simplex de 4 vértices ⟶ Tetraedro.

Polígono de n vértices ⟶ Poliedro de n vértices.

5. PROGRAMACION LINEAL.

En muchas cuestiones prácticas de índole cuantitativa, y especialmente en Econometría, se presentan problemas que, planteados en términos matemáticos, conducen al siguiente.

PROBLEMA GENERAL DE PROGRAMACION LINEAL:

Dado un sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{c} a_1^1x_1+\ldots+a_1^nx_n+b_1=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m^1x_1+\ldots+a_m^nx_n+b_m=0 \end{array} \qquad (n>m) \qquad [L]$$

y un polinomio: $C=c_0+c_1x_1+\ldots+c_nx_n$, hallar valores de las x_i, <u>positivos ó nulos</u>, que den a C el mínimo valor posible.

Es decir, hallar: $\min. C$, con las condiciones: [L] y $x_i \geq 0$.

Las ecuaciones [L] se dicen <u>ligaduras</u> del problema; se suponen linealmente independientes, pues en caso contrario, se sustituye [L] por un sistema equivalente cuyas ecuaciones lo sean.

El primer paso para la resolución del Problema, es determinar el conjunto F de n-tuplas $(x_1,\dots,x_n)$ que satisfagan a las condiciones [L] y: $x_i \geq 0$. Puede suceder que F sea vacío, en cuyo caso el Problema no tiene solución.

Con el lenguaje de la Técnica, una n-tupla solución de [L] se dice un programa. Si además cumple: $x_i \geq 0$, se dice un programa factible. Si un programa factible hace mínimo a C, es una solución ó programa óptimo.

En la resolución del problema, se utilizan los conceptos siguientes.

Como las m ecuaciones [L] se suponen independientes, existe al menos una submatriz mxm de la matriz (a_i^j) que es regular. Pues bien, si son $j_1,\dots,j_m$ las columnas de dicha submatriz, se dice que la m-tupla $(x_{j1},\dots,x_{jm})$ es una base en el problema. Las variables de una base se dicen principales (respecto de la base) y las demás no principales.

Se llama programa principal asociado a una base, al programa que se obtiene haciendo cero las variables no principales y dando a las principales el valor (único) que se obtiene resolviendo entonces las ecuaciones de ligadura.

Un programa fundamental es un programa principal factible.

Entre los diversos métodos de cálculo ideados para resolver el Problema de la programación lineal, es de destacar el que, esquemáticamente, exponemos a continuación.

Esquema del método de los simplex.

En primer lugar, notemos que el conjunto F de programas factibles, ó es vacío, ó es una región convexa del espacio afín E^n, ya que F es intersección de regiones convexas.

Si entre las ecuaciones [L] hay una del tipo: $x_1+\dots+x_n = a > 0$, F es un simplex, de donde viene el nombre del método.

En el caso general, el camino a seguir es el siguiente:

Se busca un programa fundamental cualquiera. Una vez hallado, se determina si hace mínima ó no a C. En caso negativo, se busca otro programa fundamental, permutando los papeles de una variable principal y una no principal, de manera que se haga menor el valor obtenido para C. Este proceso se repite cuantas veces se pueda y sea preciso.

Puede demostrarse que este método termina necesariamente, tras un número finito de pasos, en los siguientes finales:

1°) Se llega a un programa óptimo, y el problema está resuelto.

2°) Se comprueba que las condiciones [L] y $x_i \geq 0$ son incompatibles, ó sea que F es vacío.

3°) Los valores de C para los programas fundamentales posibles no dan mínimo en ningún caso.

Los finales 2° y 3° son los de no solución.

EJEMPLO:

Sean las ecuaciones de ligadura:

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2$$
$$x_1 + x_2 + x_5 = 5$$

y se trata de "minimizar" el polinomio: $C = x_2 - x_1$.

Un primer tanteo indica que se pueden tomar x_3, x_4, x_5 como variables principales de una base, cuyo programa principal asociado (0,0,2,2,5) es fundamental.

Pero este no hace mínimo a $C = x_2 - x_1$, por tener x_1 en esta expresión coeficiente negativo, y ser los valores 2,2,5 mayores que cero. Haciendo pues crecer x_1 hasta que una de las variables principales se anule, se observa que esto sucede para $x_1 = 2$, $x_4 = 0$.

Tomamos entonces, como nuevas variables principales x_1, x_3, x_5, y (2,0,6,0,3) como programa fundamental. Ahora, expresamos C en función de las variables no principales, y se tiene:

$C = -2 + x_4 - x_2$. Con lo cual se observa que tampoco este programa minimiza a C, pues el coeficiente de x_2 es negativo, y los valores 2,6,3 son positivos. Haciendo crecer x_2 hasta que se anule una de las variables principales, se ve que esto sucede para $x_2 = 1$, $x_5 = 0$.

Tomamos como nuevas variables principales $x_1 x_2 x_3$, y expresamos $C = -3 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5$. Como ahora los coeficientes de las dos variables no principales son positivos, C es mínimo para: $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, y por tanto, el programa fundamental correspondiente (4,1,9,0,0) es solución.

EJERCICIOS:

7. Resolver ejemplos análogos al precedente.

LECCION 20

1. FORMA BILINEAL SOBRE UN ESPACIO VECTORIAL.

En la Lección 15 se dió la definición y primeras propiedades del concepto: función (ó forma) p-lineal sobre un espacio vectorial V.

En la presente vamos a estudiar la estructura consistente en un espacio vectorial V dotado de una forma bilineal f.

DEFINICION 1: Llamamos producto escalar sobre V a una forma bilineal $f: V\times V \longrightarrow K$.

El espacio V dotado de un producto escalar f, es una estructura que recibe el nombre general de espacio métrico; por ello, f se llama tambien una métrica de V.

Si S es un subespacio de V, la restricción de f a $S\times S$ es evidentemente un producto escalar sobre S, que se dice métrica subordinada de f en S.

El número $f(v,w)$ se llama producto escalar de v por w (respecto de f). Se observa que f es una operación binaria sobre V pero con valores en K; es frecuente escribir por comodidad: $f(v,w) = v.w$, pues no da lugar a confundirse con la operación externa de V, aunque esta se escriba t.v. El valor $f(v,v) = v.v$, se escribe tambien: v^2, y se dice cuadrado de v.

EJEMPLOS:

1. V = vectores libres del plano (ó espacio) ordinario; $v.w = /v//w/\cos(v,w)$.
2. $V = K^n$; $(x^1,\dots,x^n).(y^1,\dots,y^n) = x^1y^1+\dots+ x^ny^n$.
3. $V = K[x]$; $p(x).q(x) = p(a)q(a)$, a fijo.
4. $V = K^2$; $(x^1,x^2).(y^1,y^2) = x^1y^2- x^2y^1$.

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo K, y $(a_1,\dots,a_n)$ una base de V. La expresión coordenada del producto escalar f en dicha base, es (v. pg.95, (1)): $f(v,w) = \sum_{i,j} x^iy^jf(a_i,a_j)$, donde(x^i) son las coordenadas de v e (y^j) las de w. Poniendo: $f(a_i,a_j) = a_{ij}$, queda:

$$v.w = \Sigma a_{ij}x^iy^j \qquad (1).$$

Indicando con A la matriz nxn cuyo elemento (i,j) es $a_{ij} = a_i.a_j$, queda:

$$v.w = X'AY \qquad (2),$$

con la notación de costumbre. La matriz A se dice matriz coordenada de f en el sistema X.

Si hacemos un cambio de coordenadas: $X = P\overline{X}$, se tiene: $v.w = \overline{X}'P'AP\overline{Y}$, luego la nueva matriz coordenada de f es: P'AP.

Recordando que la ecuación: $X = Q\overline{X}$ representa un cambio de coordenadas si y solo si Q es regular, se sigue que el conjunto de las matrices coordenadas de f en todos los sistemas posibles es:

$$[B \not\ni B = P'AP \ , \ P \in GL(n) \ ].$$

La relación binaria R definida en M(n) mediante:
ARB <=> $\exists$ P regular $\not\ni$ B = P'AP , es claramente de equivalencia, y da origen al concepto siguiente.

DEFINICION 2: Dos matrices A y B, nxn sobre K, se dicen congruentes si existe una P regular tal que: B = P'AP.

TEOREMA 1: Todas las matrices coordenadas de f tienen el mismo rango.

Demostración: Se propone como Ejercicio.(Ayuda: recordar el Teor.2 de la pg.89).

DEFINICION 3: Se llama rango del producto escalar f, al rango común de sus matrices coordenadas. Si rang f = n, f se dice regular (ó no degenerada); si el rango es menor, f se dice singular (ó degenerada).

DEFINICION 4: Se llama forma cuadrática asociada a f, a la aplicación q: V --> K, dada por: q(v) = f(v,v).

EJERCICIOS:

1. Sea a un vector dado de V. Demostrar que la aplicación g_a: V --> K, dada por: $g_a(v)$ = a.v , es lineal, ó sea, es un elemento de V* (v. pg.74, Ejercicio 9).
2. Demostrar que la aplicación g: V --> V* dada por: g(a)= g_a

anterior, es lineal.

Comprobar que la forma cuadrática asociada a f tiene las propiedades siguientes: 1ª) $q(tv) = t^2q(v)$, 2ª) $(v,w) \longmapsto (v+w)^2 - v^2 - w^2$, define una forma bilineal sobre V.

4. Determinar expresiones coordenadas de un producto escalar dado mediante condiciones prefijadas.

2.ESPACIO VECTORIAL ORTOGONAL.

De acuerdo con la definición general (v. pg.96) una forma bilineal f sobre V es <u>simétrica</u> si: $(\forall\ v,w)\quad f(v,w) = f(w,v)$.

TEOREMA 2: Un producto escalar f es simétrico si y solo si cualquiera de sus matrices coordenadas lo es.

Demostración: Si f es simétrica y $A = (a_{ij})$ su matriz coordenada en la base (a_i), se sigue: $a_{ij} = f(a_i,a_j) = f(a_j,a_i) = a_{ji}$, luego A es simétrica.

Recíprocamente, si una matriz coordenada A del producto escalar f es simétrica, se tiene: $f(v,w) = X'AY$, $f(w,v) = Y'AX = Y'A'X$. Pero por ser $X'AY$ una matriz 1×1 y por tanto simétrica, resulta: $X'AY = (X'AY)' = Y'A'X$; se concluye: $f(v,w) = f(w,v)$. <>

TEOREMA 3: La forma cuadrática q asociada a una f simétrica, define unívocamente a f.

Demostración: En efecto, se tiene:

$q(v+w) - q(v) - q(w) = (v+w)(v+w) - v^2 - w^2 = vw + wv$,

pero siendo f simétrica: $vw = wv$, luego queda:

$vw = f(v,w) = \frac{1}{2}[q(v+w) - q(v) - q(w)]$. <>

Ya que una f simétrica y su q asociada se determinan mutuamente, se puede decir <u>respecto de q</u> en lugar de "respecto de f". Y f se dice <u>forma polar de q</u>.

DEFINICION 5: Un <u>espacio vectorial ortogonal</u> es un espacio métrico V cuyo producto escalar f es simétrico. Tambien se dice que la métrica f es ortogonal.

De la Definición se deduce que la métrica subordinada en cualquier subespacio de V es tambien ortogonal.

En lo que sigue, V es un espacio ortogonal y f su producto escalar.

DEFINICION 6: Dos vectores v,w se dicen ortogonales (respecto de f) si: $f(v,w) = 0$. Ello equivale evidentemente a: $f(w,v) = 0$.

TEOREMA 4: Si el vector $\underline{v}$ es ortogonal a cada uno de los vectores de una familia F, lo es a todo vector de la clausura lineal K(F).

Demostración: Se propone como Ejercicio.

DEFINICION 7: Si un vector $\underline{v}$ es ortogonal a todo vector de un subespacio S, se dice que v es ortogonal a S. Si cada vector de S es ortogonal a todo vector de T, se dice que S y T son ortogonales.

TEOREMA 5: Dado un subespacio S, el conjunto de los vectores ortogonales a S es un subespacio, que se dice complemento ortogonal de S. Se indica: S^o, y se lee: S orto.

Demostración: Se propone como Ejercicio.(Basta comprobar que: $v,w \in S^o \Rightarrow tv + sw \in S^o$).

EJERCICIO:

5. Dada una base $(b_1,\dots,b_p)$ de S, y una (a_i) de V, hallar ecuaciones implícitas de S^o, y comprobar que: $\dim S^o \geq n - \dim S$.

DEFINICION 8: Se llama núcleo de la métrica f, al complemento ortogonal de V, es decir, al conjunto de vectores ortogonales a todo vector de V.

Consecuencia: El núcleo de la métrica subordinada de f en un subespacio S, es la intersección de S con S^o.

TEOREMA 6: El núcleo N de f se reduce al vector nulo, si y solo si f es regular.

Demostración: $a \in N \iff (\forall v \in V)\ a.v = 0$. Pasando a coordenadas, si X es la n-tupla coordenada de $\underline{a}$, se tiene:

$a \in N \iff (\forall Y)\ X'AY = 0 \iff X'A = 0.$

Pero por el teorema de Rouché-Frobenius, el conjunto de soluciones del sistema anterior se reduce a $(0,\dots,0)$ si y solo si A es regular, ó sea, si y solo si f es regular. <>

COROLARIO 6.1: La ~~matrix~~ métrica subordinada en un S es regular si y solo si: $S \cap S^{\circ} = \bar{0}$; en tal caso el subespacio S se dice <u>regular</u>.

DEFINICION 9: Un vector <u>v</u> se dice <u>isotropo</u> (respecto de f) si $f(v,v)= 0$, ó sea, si su cuadrado es cero. Un subespacio S se dice <u>isotropo</u> si: $(\forall\ v,w \in S)\ f(v,w) = 0$, es decir, si la métrica subordinada es <u>nula</u>.

El núcleo de f es evidentemente un subespacio isotropo.

<u>Notemos</u> que del Teorema 3 se sigue, que un subespacio S que tenga todos sus vectores isotropos, es isotropo.

TEOREMA 7: Si el vector <u>a</u> es no isotropo, V es suma directa de K(a) y su complemento ortogonal, es decir, K(a) y $K(a)^{\circ}$ son subespacios suplementarios.

Demostración: Sea v un vector cualquiera de V; escribamos la ecuación: $v = ta + w$, donde <u>t</u> y w son incógnitas (<u>t</u> escalar y w vector, evidentemente).

Pues bien, si exigimos que w sea ortogonal a K(a), lo cual equivale a: $a.w = 0$, la solución (t,w) es única. En efecto, $aw = 0 \Rightarrow av = ta^2 + 0 \iff t = (av)/a^2$; recíprocamente, el vector $w = v - (av/a^2)a$, es ortogonal a <u>a</u>.

Lo anterior demuestra que: 1°) $V = K(a) + K(a)^{\circ}$, 2ª) que: $\bar{0} = ta + w\ (w \in K(a)^{\circ}) \Rightarrow t = 0$ y $w = \bar{0}$, luego la suma es directa. <>

COROLARIO 7.1: Si <u>a</u> es un vector no isotropo de un subespacio S de V, se tiene: $S = K(a) \oplus S \cap K(a)^{\circ}$. Pues si $v \in S$, $w = v - ta \in S$.

<u>Resaltemos</u> que el Teorema es válido por ser $a^2 \neq 0$. Si se omite esa condición, la tesis es falsa.

El resultado obtenido en el Teorema 7 puede tambien enunciarse así: Dado un vector $\underline{a}$ no isotropo, cualquier vector $\underline{v}$ es suma de un vector "paralelo" y otro ortogonal a dicho $\underline{a}$. El sumando $\underline{ta}$ se dice <u>proyección ortogonal</u> de $\underline{v}$ sobre $\underline{a}$.

TEOREMA 8: Cualquier subespacio S de V, admite una base de vectores ortogonales dos a dos (<u>base ortogonal</u>).

Demostración: Vamos a proceder por inducción sobre la dimensión de S. El teorema se cumple trivialmente para dim.1 ; supongámoslo cierto para dim $< p$, y sea: dim $S = p$.

Entonces, si todo vector de S es isotropo, se sigue (v. pg. anterior) que S es isotropo, luego cualquier base de S es ortogonal.

Si por el contrario, existe un vector $\underline{a}$ de S, no isotropo, se tiene (Corolario 7.1): $S = K(a) \oplus S \cap K(a)^{\circ}$. Pero siendo $S \cap K(a)^{\circ}$ de dimensión p-1, posee una base (a_i) ortogonal, por la hipótesis de inducción. Se concluye que (a, a_i) es base ortogonal de S, ya que $\underline{a}$ es ortogonal a cada a_i. <>

COROLARIO 8.1: El espacio V admite una base $(a_1, \dots, a_n)$ ortogonal; la matriz coordenada correspondiente es diagonal, y el número de a_i no isotropos es el rango de f.

En efecto, la matriz coordenada es $A = [(a_1)^2, \dots, (a_n)^2]$.

Si una base (a_i) es ortogonal, se suele suponer que los vectores isotropos (si los hay) están situados al final. De modo que, si rang $f = r$, se tiene: $a_i^2 \neq 0$ $(i \leq r)$, $a_i^2 = 0$ $(i > r)$. Escribiendo: $a_i^2 = t_i$, la expresión coordenada respectiva es: $t_1 x^1 y^1 + \dots + t_r x^r y^r$.

COROLARIO 8.2: Una matriz simétrica cualquiera, admite una congruente diagonal.

Demostración: Hágase como Ejercicio.

EJERCICIOS:

6. Demostrar que si S es regular, $V = S \oplus S^{\circ}$.
7. Llamemos <u>descomponible</u> a un S que sea suma directa de dos

subespacios ortogonales distintos de $\bar{0}$. Demostrar que los subespacios no descomponibles son los de dimensión 1.

8. Sean A,B matrices coordenadas de f en los sistemas X,Y respectivamente. Si B es diagonal y expresamos los y^j en función de los x^i, la expresión Y'BY se dice "descomposición de X'AX en suma de cuadrados". Descomponer en cuadrados, polinomios cuadráticos homogéneos.
9. Dado un polinomio cuadrático homogéneo de n variables x^i, puede considerarse como expresión coordenada natural de una forma cuadrática q sobre K^n. Determinar: rango y núcleo de f ; restricción de f a un subespacio S dado; complemento ortogonal de S.

3. CLASIFICACION LINEAL DE LAS FORMAS CUADRATICAS REALES.

Aplicamos ahora lo anterior, al caso particular de K real.

TEOREMA 9: La métrica ortogonal f admite una matriz coordenada reducida: $[1,..,1,-1,..,-1,0,..,0]$.

Demostración: Acabamos de ver que existe una base ortogonal (a_i) de V talque: $a_i^2 \neq 0$ $(i \leq r)$, $a_i^2 = 0$ $(i>r)$. Podemos ordenar los r primeros vectores de modo que la base ortogonal verifique: $a_i^2 > 0$ $(i \leq s)$, $a_i^2 < 0$ $(s < i \leq r)$. De esta deducimos la siguiente, tambien ortogonal evidentemente:

$$\frac{a_i}{(a_i^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (i \leq s), \quad \frac{a_i}{(-a_i^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (s < i \leq r), \quad a_i \ (i > r).$$

Respecto de esta base, la matriz coordenada es diagonal, y su diagonal principal está formada por s unos, r-s menos unos y n-r ceros. <>

Es claro que pueden faltar dos ó una de esas partes, pero no las tres.

El número s es el número de vectores de la base ortogonal (a_i) cuyo cuadrado es positivo. Para abreviar, le llamaremos signatura de la base (a_i).

TEOREMA 10 (Ley de inercia de Sylvester): Todas las bases ortogonales (respecto de f) de V, tienen la misma signatura.

Demostración: Sean (a_i) (b_j) dos bases ortogonales, ordenadas como en el Teorema 9, y sean: $sig(a_i) = s$, $sig(b_j) = s'$. Se sigue que todo vector $\underline{a}$ de $S = K(a_1,\ldots,a_s)$, excepto el $\bar{0}$, tiene cuadrado positivo, pues: $a^2=(x^1)^2+\ldots+(x^s)^2$; analogamente, se sigue que todo vector de $T = K(b_{s'+1},\ldots,b_n)$ tiene cuadrado no positivo. Por lo tanto: $S \cap T = \bar{0}$, luego: $\dim S + \dim T = s + n - s' = \dim(S+T) \leq n$; se deduce: $s - s' \leq 0$.

Cambiando los papeles de s y s' en el razonamiento anterior, se tiene: $s' - s \leq 0$; se concluye: $s = s'$. <>

DEFINICION 10: Se llama <u>signatura</u> de f (ó de q) a la signatura común de sus bases ortogonales.

COROLARIO 10.1: La forma q admite una sola matriz coordenada reducida.

Lo anterior da un criterio de clasificación (es decir, define una partición) de las formas cuadráticas sobre V, situando en la misma clase aquellas que tienen el mismo rango y la misma signatura, y por tanto, la misma matriz coordenada reducida. Las clases posibles vienen dadas por las matrices reducidas distintas posibles.

Como cada clase determina univocamente la matriz reducida correspondiente,esta se dice representante <u>canónico</u>, ó matriz <u>canónica</u> de la clase.

DEFINICION 11: Se llama <u>signatura</u> de una matriz simétrica real, la del producto escalar que representa.

COROLARIO 10.2: Dos matrices reales diagonales congruentes tienen el mismo número de términos positivos.

EJERCICIOS:

10. Escribir las matrices reducidas posibles para n = 3.
11. Demostrar que dos matrices simétricas nxn reales son congruentes si y solo si tienen el mismo rango y la misma signatura.

12. Probar que si es: $t_1p_1^2+\dots+t_rp_r^2$, una descomposición en suma de cuadrados de la forma cuadrática real $X'AX$, el número $\underline{r}$ y el número de t_i positivos está determinado por dicha forma.

DEFINICION 12: Una forma cuadrática real q se dice <u>definida positiva</u> si: $(\forall v \neq \bar{0})\quad q(v) > 0$.

TEOREMA 11: Una forma cuadrática real q es definida positiva si y solo si su signatura es $\underline{n}$ (ó sea, dim V).

Demostración: Se propone como Ejercicio.(Ayuda: utilizar una expresión coordenada reducida).

LECCION 21

1.ESPACIO VECTORIAL EUCLIDIANO.

Los vectores libres del plano ordinario, constituyen el primer ejemplo de espacio vectorial dotado de una forma cuadrática definida positiva: la dada por: $v \mapsto$ longitud de v. Este ejemplo fué el origen del concepto siguiente.

DEFINICION 1: Se llama <u>espacio vectorial euclidiano</u> a un espacio V ortogonal real, cuya métrica f tiene signatura n = dim V. O sea, si la forma cuadrática q asociada es definida positiva.

<u>Consecuencias</u>:

1ª) $v^2 = 0 \Rightarrow v = \bar{0}$.

2ª) La forma f es regular, pues rang f = n.

3ª) La métrica subordinada en cualquier subespacio S de V es tambien euclidiana. Por tanto, S es regular.

4ª) Existe alguna base ortogonal (a_i) tal que: $a_i^2 = 1$ $(i = 1,\dots,n)$. Pues por el Teorema 9 de la Lección anterior, la f admite una matriz coordenada $[1,\dots,1]$, ya que sig f = n.

DEFINICION 2: Se llama <u>longitud</u> ó <u>norma</u> de un vector v de V, a la raiz cuadrada positiva $(v^2)^{\frac{1}{2}}$; se indicará $/v/$. Se dice <u>unitario</u> un vector cuya norma vale 1.

DEFINICION 3: Una base se dice ortonormada si es ortogonal y todos sus vectores son unitarios. El sistema coordenado que define se dice euclidiano, y las coordenadas euclidianas.

Puede suceder que en el espacio euclidiano V, interese considerar una forma bilineal simétrica g distinta de la f. Por ello, entre otras nomenclaturas que citaremos más adelante, se suele usar la siguiente.

DEFINICIÓN4: La expresión coordenada de f (ó de q) en un sistema X, se suele llamar forma fundamental del espacio V en dicho sistema.

Por ejemplo, la forma fundamental en coordenadas euclidianas es: $X'Y = x^1y^1 + \ldots + x^ny^n$, y la forma cuadrática fundamental: $X'X = (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2$.

TEOREMA 1: Dado un vector $a \neq \bar{0}$, cualquier vector v admite una descomposición única: $v = ta + w$, donde w es ortogonal al vector a.

Demostración: Basta aplicar el Teorema 7 de la Lección 20 (pg.144), notando que ahora, $a \neq \bar{0} \Rightarrow a^2 \neq 0$. <>

TEOREMA 2 (Desigualdad de Schwarz): En un espacio euclidiano se cumple: $(\forall\, v,w)\ \ /vw/ \leq /v//w/$.

Demostración: En efecto, si $v = \bar{0}$, se cumple trivialmente. Si $v \neq \bar{0}$, se tiene: $w = tv + u$, $uv = 0$, $t = vw/v^2$; se deduce: $w^2 = t^2v^2 + u^2 = \dfrac{(vw)^2}{(v^2)^2}\,v^2 + u^2 = \dfrac{(vw)^2}{v^2} + u^2$, luego: $v^2w^2 = (vw)^2 + v^2u^2$, $v^2w^2 \geq (vw)^2$, $/v//w/ \geq /vw/$. <>

TEOREMA 3 (Desigualdad triangular): En un espacio euclidiano se tiene: $(\forall\, v,w)\ \ /v + w/ \leq /v/ + /w/$. Además, el signo = sucede si y solo si (v,w) son dependientes y del mismo sentido.

Demostración: Desarrollando $(v + w)^2$ y aplicando la desigualdad de Schwarz, se tiene:

$$(v+w)^2 = v^2 + 2vw + w^2 \leq /v/^2 + 2/vw/ + /w/^2 \leq /v/^2 + 2/v//w/ + /w/^2$$

y extrayendo la raiz cuadrada resulta la desigualdad triangular.

En cuanto al signo =, es evidente que sucede si y solo si: $vw = /v//w/$, $(vw)^2 = v^2w^2$. Excluyendo el caso $v = \bar{0}$ (en el cual $v = 0.w$), se sigue que: $w = tv + u \Rightarrow v^2u^2 = 0 \Rightarrow u^2 = 0 \Rightarrow u = \bar{0}$, luego: $w = tv$. Además: $t = vw/v^2 = |v||w|/v^2 > 0$. <>

DEFINICION 5: Dados dos vectores v,w no nulos, se llama <u>ángulo</u> que forman, al escalar: $\alpha \in [0,\pi] \ni \cos\alpha = vw/|v||w|$.

Consecuencias:

1ª) El producto escalar $vw = /v//w/\cos\alpha$.

2ª) v,w ortogonales $\Leftrightarrow \alpha = \pi/2$.

3ª) $w = t^2v\ (-t^2v) \Leftrightarrow \alpha = 0\ (\pi)$.

4ª) La proyección ortogonal de w sobre v es: $(/w/\cos\alpha)v_1$ donde $v_1 = v/|v|$. Pues sabemos que: $t = vw/|v|^2$.

5ª) $/v - w/^2 = /v/^2 + /w/^2 - 2/v//w/\cos\alpha$ (relación del coseno).

EJERCICIOS:

1. Se llama <u>R^n euclidiano</u>, al espacio vectorial R^n dotado de la métrica cuya expresión coordenada en la base natural es: $x^1y^1 + \ldots + x^ny^n$. La desigualdad de Schwarz en este caso, se suele llamar de Cauchy. Desarrollarla para $n = 3$, y expresar $(X'Y)^2 - (X'X)(Y'Y)$, como suma de cuadrados.
2. En el R^3 euclidiano, hallar la proyección ortogonal de un vector Y sobre un vector X dado.

La longitud definida en un espacio vectorial euclidiano ha sido origen de un concepto más general, que es el siguiente.

DEFINICION 6: Sea V un espacio sobre el cuerpo real ó complejo, dotado de una aplicación $d: V \longrightarrow R^+$ (números reales no negativos), que cumple:

1°) $d(v) = 0 \Rightarrow v = \bar{0}$.

2°) $d(tv) = /t/d(v)$.

3°) $d(v + w) \leq d(v) + d(w)$.

Entonces, <u>d</u> se llama una <u>norma</u> sobre V, y este un <u>espacio vectorial normado</u>.

<u>2.ORTOGONALIDAD Y BASES ORTONORMADAS.</u>

2. ORTOGONALIDAD Y BASES ORTONORMADAS.

Sea V un espacio vectorial euclidiano, de dimensión n.

DEFINICION 7: Una familia ó sistema de vectores $(v_1,\ldots,v_p)$ se dice ortogonal si: $v_i v_j = 0$ para $i \neq j$.

TEOREMA 4: Una familia ortogonal cuyos vectores son todos distintos de $\bar{0}$, es libre.

Demostración: Sea $(v_1,\ldots,v_p)$ tal familia, y supongamos: $t^1v_1+\ldots+t^pv_p = \bar{0}$. Multiplicando esta igualdad escalarmente por v_i (i fijo cualquiera), queda: $t^1(v_1v_i)+\ldots+t^p(v_pv_i) = 0$, luego: $t^i(v_i)^2 = 0$; pero $(v_i)^2 \neq 0$, por ser $v_i \neq \bar{0}$, y se concluye: $t^i = 0$. Por lo tanto, la familia citada es libre. <>

TEOREMA 5 (Método de ortogonalización de Schmidt): Una familia ortogonal libre $(a_1,\ldots,a_p)$ puede completarse hasta formar una base ortogonal de V.

Demostración: Desde luego, si $p<n$ se le puede añadir un vector b_{p+1} de modo que $(a_1,\ldots,a_p,b_{p+1})$ sea libre. Ahora, escribamos: $a_{p+1} = b_{p+1} - t^1_{p+1}a_1-\ldots-t^p_{p+1}a_p$, donde: $t^i_{p+1} = a_ib_{p+1}/(a_i)^2$ $(i = 1,\ldots,p)$; se sigue: $a_ia_{p+1} = 0$ $(i = 1,\ldots,p)$, luego el sistema $(a_1,\ldots,a_p,a_{p+1})$ es ortogonal; además es libre, pues: $a_{p+1} \neq \bar{0}$, por ser $(a_1,\ldots,a_p,b_{p+1})$ libre.

En resumen, hemos demostrado que en el supuesto $p < n$, existe un vector a_{p+1} que añadido a la familia dada, forma otra ortogonal y libre.

Por tanto, si $p+1 < n$, existe un vector a_{p+2}, etc., hasta llegar a la base ortogonal buscada. <>

COROLARIO 5.1: Una base ortonormada de un subespacio S de V, puede completarse hasta formar una base ortonormada de V.

Demostración: Se propone como Ejercicio.

TEOREMA 6: Cualquier subespacio S de V y su complemento ortogonal S°, son suplementarios.

Demostración: Sea $(a_1,\ldots,a_p)$ una base ortogonal de S; según el Teorema 5 se puede completar hasta formar una base

$(a_1,\dots,a_n)$ ortogonal de V. Pues bien, sea $T = K(a_{p+1},\dots,a_n)$; como S es regular, $S \cap S^o = \bar{0}$ (v. pg.144, Corol.6.1) luego: $\dim S^o \leq n-p$; pero claramente: $T \subset S^o$ y $\dim T = n-p$; se concluye: $T = S^o$ y suplementario de S. <>

COROLARIO 6.1: $(S^o)^o = S$. Pues: $\dim(S^o)^o = n - (n-p) = p$, y además: $S \subset S(^o)^o$, por definición de complemento ortogonal.

EJERCICIOS:

3. Dada una base del E^4 euclidiano, determinar una base ortogonal por el método de Schmidt.
4. Dado un subespacio S de dicho E^4, hallar una base de S^o, y normalizarla.
5. Demostrar que: $V = S \oplus T \Rightarrow V = S^o \oplus T^o$.
6. Hallar vectores que satisfagan a condiciones de ortogonalidad dadas.

TEOREMA 7: La coordenada i-sima de un vector $\underline{v}$ respecto de una base $(a_1,\dots,a_n)$ ortonormada, es igual al producto escalar: $\underline{v.a_i}$.

Demostración: Se propone como Ejercicio.(Basta expresar $\underline{v}$ como combinación lineal de los (a_i) y comprobar la tesis).

COROLARIO 7.1: Si v es unitario, su i-sima coordenada es el coseno del ángulo (v,a_i), pues entonces: $va_i = \cos(v,a_i)$. Por ello, dichas coordenadas de v se dicen <u>cosenos directores</u> de $\underline{v}$ respecto de la base ortonormada (a_i).

TEOREMA 8: La matriz de un cambio de coordenadas euclidianas es inversa de su traspuesta.

Demostración: Sea $X = P\bar{X}$ el cambio mencionado; como X y $\bar{X}$ son sistemas coordenados euclidianos, la matriz coordenada de f en ambos sistemas es I_n; por lo tanto,(v. pg.141, lin.7): $I_n = P'I_nP$, ó sea: $I_n = P'P$. <>

DEFINICION 8: Una matriz cuadrada real se dice <u>ortogonal</u> si es inversa de su traspuesta.

Recordemos que: $P'P = I_n \Leftrightarrow PP' = I_n$.

Consecuencias:

1ª) Ser P ortogonal equivale a: los vectores fila (columna) constituyen una base ortonormada del E^n euclidiano.

2ª) El determinante de una matriz ortogonal vale +1 ó -1. pues $|P'P| = 1 \Rightarrow |P'||P| = 1 \Rightarrow |P|^2 = 1$. Si $|P| = +1$, la matriz se dice ortogonal directa.

TEOREMA 9: Las matrices ortogonales nxn forman grupo con la operación producto de matrices.

Demostración: Se propone como Ejercicio.

DEFINICION 9: El grupo de las matrices ortogonales nxn se llama grupo ortogonal de orden n; es subgrupo del GL(n), y se indica: O(n). El conjunto de las ortogonales directas es subgrupo de O(n); se indica $O^+(n)$ y se llama grupo de las rotaciones de orden n.

EJERCICIOS:

7. Probar que cualquier matriz ortogonal de orden 2, puede escribirse con elementos cos α y sen α.
8. Obtener matrices ortogonales de orden 3, a partir de una fila dada, ó de dos.

3.CLASIFICACION ORTOGONAL DE LAS FORMAS CUADRATICAS REALES.

En el párrafo 3 de la Lección 20, se clasificaron las formas cuadráticas sobre un V real, situando en la misma clase aquellas cuyas matrices coordenadas eran congruentes.

En el presente, vamos a clasificar las formas cuadráticas sobre un V euclidiano, utilizando una congruencia más restringida.

DEFINICION 10: Dos matrices A y B, nxn reales, se dicen congruentes ortogonales si existe una matriz P ortogonal, tal que: $B = P'AP$, ó sea: $B = P^{-1}AP$.

Notemos que la relación binaria R definida en M(n) mediante: ARB $\Leftrightarrow$ A es congruente ortogonal con B, es claramente de equivalencia.

Sea pues V un espacio euclidiano de dimensión n, y g una forma bilineal simétrica sobre V. Para evitar confusiones con la forma fundamental f, se hace necesario aplicar a esta g una nomenclatura distinta de la establecida para un espacio ortogonal, reservando esta para f.

Así, se dirá: conjugado (respecto de g) en vez de ortogonal; autoconjugado en vez de isotropo; subespacio polar de S en vez de complemento ortogonal de S; base autopolar en vez de base ortogonal.

Sean A y B matrices coordenadas de g en sendas bases ortonormadas. Sabemos que: $B = P'AP$, donde P es la matriz del cambio de coordenadas. Pero aquí P es ortogonal, por ser el cambio de coordenadas euclidianas. Por lo tanto, el conjunto de matrices coordenadas de g en todas las bases ortonormadas posibles es: $[B \nmid B = P'AP \ , \ P \in O(n) \ ]$.

Tratemos a continuación, de obtener una matriz de este conjunto, que sea diagonal. Si existe, ello equivale evidentemente, a la existéncia de una base ortonormada que sea a la vez autopolar (v. pg.145, Corol.8.1). La cual existirá, si encontramos una base ortogonal que sea tambien autopolar.

La matriz A puede considerarse real y simétrica arbitraria. Interesa estudiar en este caso, la ecuación $|A - xI_n| = 0$, llamada ecuación secular por razones históricas. Desarrollando el determinante, se obtiene un polinomio cuyo término de mayor grado es: $(-1)^n x^n$, y cuyo término constante es $|A|$. Se sigue que la ecuación es de grado n, y tiene por lo tanto, n raices reales ó imaginarias, distintas ó confundidas. Cada una de ellas se dice raiz característica de A.

TEOREMA 10: Las n raices de la ecuación secular $|A-xI_n|=0$ son todas reales.

Demostración: Sea t_1 una raiz, es decir: $|A - t_1 I_n| = 0$. Se sigue que el sistema de ecuaciones lineales homogéneas: $(A - t_1 I)X = (0)$ tiene una solución $X_1 \neq (0)$, compleja en general. Como: $(A - t_1 I)X_1 = (0)$, se tiene: $AX_1 = t_1 X_1$; trasponiendo esta igualdad, y escribiendo su conjugada compleja ($\ddot{\ }$), resulta: $X_1' A' = t_1 X_1'$, $\ddot{A}\ddot{X}_1 = \ddot{t}_1 \ddot{X}_1$; pero $A' = \ddot{A} = A$, por ser A real simétrica. Se deduce: $X_1' A \ddot{X}_1 = t_1 X_1' \ddot{X}_1$, $X_1' A \ddot{X}_1 = \ddot{t}_1 X_1' \ddot{X}_1$; y restando queda: $(0) = (t_1 - \ddot{t}_1) X_1' \ddot{X}_1$; pero: $X_1' \ddot{X}_1 = |x_1^1|^2 + \ldots + |x_1^n|^2 \neq 0$ por ser $X_1 \neq (0)$; se concluye: $t_1 - \ddot{t}_1 = 0$, ó sea: t_1 real. <>

TEOREMA 11: Existe en V una base ortogonal que es tambien autopolar respecto de g.

Demostración: Fijado un sistema de coordenadas X euclidianas, sea A la matriz de g en dicho sistema. Por comodidad, diremos vector X_i en vez de: vector cuya n-tupla coordenada es X_i.

En virtud del Teorema precedente, existe un vector $X_1 \neq \bar{0}$ tal que: $AX_1 = t_1 X_1$, t_1 real. Sabemos (pg. 144, Teor.7) que: $V = E(X_1) \oplus X_1^{\circ}$; pero todo vector de X_1° es conjugado con X_1 ya que: $Y'X_1 = (0) \Rightarrow Y'AX_1 = t_1 Y'X_1 = (0)$.

Ahora bien, X_1° es espacio euclidiano con la métrica f_1 subordinada de f, y posee tambien la métrica g_1 subordinada de g. Aplicando pues a X_1°, f_1, g_1 lo hecho con V, f, g, se tendrá un vector X_2 tal que: $X_1^{\circ} = E(X_2) \oplus X_2^*$, donde todo vector de X_2^* es ortogonal y conjugado con X_2.

Se comprende que reiterando este proceso, ó utilizando el método de inducción, queda probada la existencia de la base del enunciado. <>

COROLARIO 11.1: Existe en V una base ortonormada que es asimismo autopolar respecto de g. En efecto, una tal base se obtiene normalizando la del Teorema.

COROLARIO 11.2: Existe un sistema de coordenadas euclidianas, en el cual la matriz coordenada de g es diagonal.

COROLARIO 11.3: Una matriz simétrica real posee una congruente ortogonal diagonal.

TEOREMA 12: La ecuación secular $|A - xI| = 0$ es la misma para todas las matrices coordenadas de g, en bases ortonormadas.

Demostración: Si son A y B dos tales matrices, sabemos que: $B = P'AP$, P ortogonal, luego: $B = P^{-1}AP$. Se sigue: $B - xI = P^{-1}(A - xI)P$, $|B - xI| = |P^{-1}||A - xI||P| = |A - xI|$ ya que: $|P^{-1}||P| = 1$. <>

COROLARIO 12.1: Dada una matriz A simétrica real, los elementos a_{ii} de una matriz diagonal congruente ortogonal con A, son las raices de la ecuación secular de A.

TEOREMA 13: Dos matrices A y B, simétricas reales nxn, son congruentes ortogonales <=> tienen la misma ecuación secular.

Demostración: =>) es el Teorema 12.

<=) Sea $A^* = [t_1, \ldots, t_n]$ una matriz diagonal congruente ortogonal con A, y $B^* = [s_1, \ldots, s_n]$ una análoga con B. En virtud del Corolario 12.1, existe una permutación α del S(n) tal que: $[s_1, \ldots, s_n] = [t_{\alpha 1}, \ldots, t_{\alpha n}]$.

Ahora bien, si α es una trasposición (i,j), la matriz $B^* = P_{ij}A^*P_{ij}$, como se comprueba inmediatamente (v. pg.84). Pero P_{ij} es ortogonal, y $P'_{ij} = P_{ij}$; por lo tanto, A^* y B^* son congruentes ortogonales, luego tambien A y B.

Si α es una permutación cualquiera, es un producto de r transposiciones, luego: $B^* = P_1 \ldots P_r A^* P_r \ldots P_1$, donde $(P_1 \ldots P_r)$ es ortogonal e igual a su traspuesta, por serlo cada P_h. Se concluye como antes, que A y B son congruentes ortogonales. <>

Como resumen de este párrafo, podemos decir que hemos obtenido una clasificación de las formas cuadráticas sobre un V euclidiano, situando en la misma clase las congruentes ortogonales, es decir, las que tienen la misma ecuación secular. Las clases posibles vienen dadas por los conjuntos posibles de n números reales t_i.

Como cada tal conjunto admite una sola ordenación en la que: los $t_i = 0$ estén al final y los $\neq 0$ en orden no creciente ($t_1 \geq \ldots \geq t_r \neq 0$, $t_{r+1} = \ldots = t_n = 0$), resulta que cada clase determina unívocamente dicha n-tupla, por lo que la matriz diagonal correspondiente se dice representante canónico, ó matriz canónica de la clase respectiva.

EJERCICIOS:

9. Demostrar que la relación de congruencia ortogonal es de equivalencia.
10. Demostrar que dada una matriz simétrica real A, existe una P ortogonal directa, tal que P'AP es diagonal.
11. Dada una matriz simétrica real de orden 2 ó 3, escribir la ecuación secular y hallar sus raices.
12. Dada una matriz simétrica real A de orden 2 ó 3, hallar una matriz ortogonal P tal que P'AP sea diagonal.
13. Demostrar que el coeficiente de x^p en $|A - xI|$ es: $(-1)^p A_{n-p}$, donde A_{n-p} es la suma de los $\binom{n}{p}$ menores principales de orden $n-p$ de A. (Ayuda: recordar la derivada de un determinante cuyos términos son funciones de x).

LECCION 22

1. PLANO EUCLIDIANO. DEFINICIONES.

El plano ordinario es un plano afín real cuyo plano vectorial es el de vectores libres. Ahora bien, ya indicamos que este plano vectorial se considera dotado de una forma cuadrática definida positiva, que es la dada por: $v \longmapsto$ longitud de v. Se tiene así un ejemplo del concepto siguiente.

DEFINICION 1: Un plano euclidiano (ó euclideo) es un plano afín real cuyo plano vectorial es euclidiano.

Se llama distancia entre dos puntos P,Q a la longitud del vector $\overline{PQ}$.

Se llama ángulo de dos rectas, al ángulo que forman dos vectores direccionales respectivos. Se tienen así dos valores suplementarios.

Las propiedades de un plano euclidiano que dependen de la métrica f de su plano vectorial, se dicen propiedades métricas. Se distinguen así de las propiedades afines, que dependen exclusivamente de la estructura de plano afín.

2. COORDENADAS RECTANGULARES. CAMBIOS DE COORDENADAS.

Sea E un plano euclidiano.

DEFINICION 2: Un sistema de referencia $(0,u_1,u_2)$ se dice rectangular, si la base (u_1,u_2) es ortonormada. Las coordenadas respectivas se dicen rectangulares.

Si los u_i son unitarios pero: $u_1u_2 = \cos\alpha \neq 0$, las coordenadas se dicen oblicuas.

En lo que sigue, las coordenadas se suponen rectangulares, y la base de orientación fija, que se dice positiva.

Si es: $X = p + A\bar{X}$, la ecuación de un cambio de coordenadas rectangulares, se sigue que A es ortogonal directa, por ser la matriz de un cambio de bases ortonormadas de la misma orientación. Se tiene: $a_i^j = u_iv_j$ (v. pg.112).

Si es α el ángulo que forman (u_1,v_1), las ecuaciones del cambio son, con notación (x,y):

$$x = p^1 + \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\,\mathrm{sen}\,\alpha$$
$$y = p^2 + \bar{x}\,\mathrm{sen}\,\alpha + \bar{y}\cos\alpha$$

puesto que: $a_{ij} = \cos(u_i,v_j)$.

Cuando $\alpha = 0$, el cambio es una <u>traslación de ejes</u> ; si $p^1 = p^2 = 0$, es un <u>giro de ejes</u> de ángulo α.

3.DISTANCIAS. ANGULOS. AREAS.

Sean $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ dos puntos dados por sus coordenadas. Sabemos que las del vector $\overline{PQ}$ son $(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$, luego: distancia $|PQ| = (\,(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2)^{\frac{1}{2}}$.

Sea m una recta de ecuación: $ax + by + c = 0$; un vector direccional de m es el de coordenadas $(b,-a)$, luego el ángulo α que forma con el eje Ox tiene: $\mathrm{tg}\,\alpha = -a/b$.

Si es: $a'x+b'y+c' = 0$ la ecuación de otra recta m', se tiene:

$$\cos(m,m') = \frac{aa' + bb'}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}(a'^2+b'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Notemos que el vector (a,b) es ortogonal al $(b,-a)$. De aquí ó de la fórmula anterior, se sigue que m,m' son perpendiculares si y solo si: $aa' + bb' = 0$.

<u>Distancia de un punto a una recta.</u>

Sea $P_o(x_o,y_o)$ y m: $ax+by+c = 0$. Si es Q el pié de la perpendicular de P_o a m, y $P_1(x_1,y_1)$ un punto de m, la distancia $|P_oQ|$ es la longitud de la proyección del vector P_oP_1 sobre el (a,b), luego:

$$|P_oQ| = \frac{|a(x_1-x_o)+b(y_1-y_o)|}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{|ax_o + by_o + c|}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

En el caso P_o = origen O, se tiene: $|OQ| = |c|/(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$

Interesa en ocasiones saber si el segmento OQ está por <u>encima</u> de Ox (es decir, si Q está en el semiplano <u>positivo</u> de Ox), ó por <u>debajo</u>. Sucederá lo primero, si m corta a Oy en un punto de <u>y</u> positiva, ó sea, si: $-c/b > 0$, y lo segundo, si:

$-c/b < 0$.

Sea $\underline{u}$ el vector unitario: $\overline{OQ}/|OQ|$; sus coordenadas son $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, donde α es el ángulo que se recorre desde $\overline{OA}_1$ hasta $\underline{u}$ en sentido positivo. En/tonces, si escribimos $|OQ| = p$, un punto $P(x,y)$ es de m, si y solo si: $\overline{OP}.\overline{u} = p$, ó sea:

$$x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha - p = 0 \qquad (1),$$

que es una ecuación implicita de m, llamada <u>ecuación normal</u>.

Para pasar de una ecuación implicita cualquiera: $ax + by + c = 0$, a la normal, basta por tanto, dividir por $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ y multiplicar por -1 si $\underline{c}$ fuese positivo.

EJERCICIOS:

1. Hallar la distancia entre un punto $P(x_o,y_o)$ y una recta dada por ecuaciones paramétricas, en función de los datos.
2. Hallar la distancia entre las rectas paralelas: $ax+by+c = 0$, $ax+by+c' = 0$.

<u>Area de un triángulo.</u>

Sea el paralelogramo $P_1P_2P_3P_4$, (x_i,y_i) las coordenadas de P_i. Su área es igual a: $|P_1P_2|$ por la distancia de P_3 a la recta P_1P_2. Se tiene:

Ecuación de P_1P_2: $(x-x_1)(y_2-y_1) - (y-y_1)(x_2-x_1) = 0$

Distancia $P_3-P_1P_2$: $\dfrac{|(x_3-x_1)(y_2-y_1) - (y_3-y_1)(x_2-x_1)|}{[(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2]^{\frac{1}{2}}}$

Area de $P_1P_2P_3P_4$ = valor absoluto de $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$

$$= \text{valor absoluto de} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = |D| \;. \qquad (2)$$

<u>Notemos</u> que el area del paralelogramo definido por el par de vectores: $u(p_1,q_1)$, $v(p_2,q_2)$ será: $|p_1q_2 - p_2q_1|$.

De (2) se sigue que:

Area del triángulo $P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\,|D|$.

Ahora bien, recordando lo dado sobre orientación de un triángulo, resulta que $\frac{1}{2}D$ tiene por valor absoluto el area del triángulo, y por signo + ó − , según que la orientación del triángulo $P_1P_2P_3$ sea positiva (es decir, igual que la del OA_1A_2) ó negativa.

EJERCICIOS:

3. Determinar rectas que satisfagan a condiciones angulares ó de distancia, dadas.
4. Hallar puntos dados por condiciones angulares, de distancia ó de áreas.
5. Hallar el área de un polígono dado.

LECCION 23

1.ESPACIO EUCLIDIANO. COORDENADAS RECTANGULARES.

Vale lo dicho en el párrafo 1 de la Lección 22 precedente, cambiando "plano" por "espacio". Y cuando digamos "espacio" en lo sucesivo, entendemos de dimensión 3. Así pues:

DEFINICION 1: Un espacio euclidiano (ó euclideo) es un espacio afin real cuyo espacio vectorial es euclidiano.

Sea E un espacio euclidiano.

DEFINICION 2: Un sistema de referencia $(0,u_1,u_2,u_3)$ se dice rectangular si la base (u_i) es ortonormada. Las coordenadas respectivas se dicen rectangulares.

En lo que sigue, las coordenadas se suponen rectangulares y la base (u_i) de orientación fija, que se dirá positiva.

Si es: $X = p + A\bar{X}$, la ecuación de un cambio de coordenadas rectangulares, se tiene que A es ortogonal directa, por ser la matriz de un cambio de bases ortonormadas de igual orientación. Además: $a_i^j = u_i v_j = \cos(u_i,v_j)$.

Los casos particulares más notables, de este cambio de coordenadas, son los siguientes.

<u>Traslación de ejes</u>: Cuando $A = I_3$, ó sea: $u_i = v_i$ $(i=1,2,3)$.

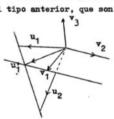
<u>Giro alrededor de Ox</u>: $p = (0)$, $u_1 = v_1$. Se tiene:

$$x = \bar{x}$$
$$y = \bar{y}\cos\alpha - \bar{z}\,\mathrm{sen}\alpha$$
$$z = \bar{y}\,\mathrm{sen}\alpha + \bar{z}\cos\alpha$$

Análogamente, los giros de ejes Oy, Oz.

<u>Giro general de ejes</u>: $p = (0)$.

Este cambio de coordenadas, puede escribirse como producto de tres giros del tipo anterior, que son:



1°) Giro alrededor de u_3, que pasa de la base (u_1,u_2,u_3) a la (u_1',u_2',u_3), siendo u_1' el vector unitario sobre la semirrecta intersección de los planos (u_1u_2), (v_1v_2) y contenida en el ángulo (u_1,v_1) (v. figura).

2°) Giro alrededor de u_1' , que pasa de la base (u_1',u_2',u_3) a la (u_1',u_2'',v_3).

3°) Giro en torno de v_3 , que pasa de la base (u_1',u_2'',v_3) a la (v_1,v_2,v_3).

El ángulo del giro 1° es $\varphi = (u_1,u_1')$; el del 2° es $\theta = (u_3,v_3)$; el del 3°: $\Psi = (u_1',v_1)$. Se conocen con el nombre de <u>ángulos de Euler</u>.

EJERCICIOS:

1. Escribir las ecuaciones de los tres giros anteriores, y la del giro general, producto de ellos.
2. Hallar las ecuaciones de un cambio de coordenadas, conociendo la situación de la referencia nueva respecto de la antigua

ó viceversa.

2.PRODUCTO VECTORIAL. PRODUCTO MIXTO. IDENTIDADES.

Sea V un espacio vectorial euclidiano de dimensión 3.

Una operación binaria interna, sumamente interesante, puede definirse en V del modo siguiente.

TEOREMA 1: Dado un par de vectores (u,v) independientes, existe un solo vector w que cumple:

1°) uw = 0 , vw = 0.

2°) la terna (u,v,w) es de orientación positiva.

3°) /w/ = /u//v/senα , donde α es el ángulo agudo que forman u y v; es decir, /w/ = /Area del paralelogramo (u,v)/.

Demostración: Sean (x_1,y_1,z_1) las coordenadas de u , y (x_2,y_2,z_2) las de v, en un cierto sistema euclidiano. Llamemos (x,y,z) las de un vector w que satisfaga a 1°,2° y 3°.

Se sigue de 1° que: $xx_1+yy_1+zz_1 = 0$, $xx_2+yy_2+zz_2 = 0$; y siendo 2 el rango de este sistema, la solución general del mismo es:

$$(1)\quad x = t\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = ta \ , \ y = t\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} = tb \ , \ z = t\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = tc$$

Pero de 3° se sigue que: $w^2 = u^2v^2\mathrm{sen}^2\alpha = u^2v^2 - u^2v^2\cos^2\alpha = u^2v^2-(uv)^2$. En coordenadas:

$$x^2+y^2+z^2 = (x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2) - (x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2 =$$
$$= (y_1z_2-y_2z_1)^2+(z_1x_2-z_2x_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2 \quad ,$$

y sustituyendo los valores de (1), se tiene:

$t^2a^2+ t^2b^2+ t^2c^2 = a^2+ b^2+ c^2$, ó sea: $(t^2-1)(a^2+ b^2+ c^2)= 0$.

Como u,v son independientes, no puede ser: a = b = c = 0, luego: $a^2+ b^2+ c^2 \neq 0$. Se deduce: $t^2-1 = 0$, luego: t = +1 ó -1.

Ahora bien, 2° expresa que es positivo el determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = xa + yb + zc = t(a^2+ b^2+ c^2) \ , \text{ luego: } t > 0.$$

Se concluye: t = 1, x = a, y = b, z = c, luego w existe y es único. <>

DEFINICION 3: Dado un par de vectores (u,v) se llama <u>producto vectorial</u> de u por v, al vector $\overline{0}$ si (u,v) es ligada, y al vector w precedente si (u,v) es libre. Se escribe: $u \wedge v$, y se lee: u vectorial v.

<u>Notemos</u> que <u>tambien</u> en el caso de (u,v) dependientes, las coordenadas del producto vectorial son (a,b,c), pues en este caso: $a = b = c = 0$.

TEOREMA 2: La operación binaria interna definida sobre V por: $(u,v) \longmapsto u \wedge v$, es bilineal antisimétrica.

Demostración:

1°) $tu \wedge v$ tiene por coordenadas: $\begin{vmatrix} ty_1 & tz_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$, etc., luego: $tu \wedge v = t(u \wedge v)$; analogamente: $u \wedge tv = t(u \wedge v)$.

2°) $(u+u') \wedge v$ tiene por coordenadas:

$\begin{vmatrix} y_1+y_1' & z_1+z_1' \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1' & z_1' \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$, etc., luego:

$(u+u') \wedge v = (u \wedge v) + (u' \wedge v)$; analogamente:
$u \wedge (v+v') = (u \wedge v) + (u \wedge v')$.

3°) $v \wedge u$ tiene por coordenadas: $\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$, etc., luego: $v \wedge u = -(u \wedge v)$. <>

EJERCICIOS:

3.Comprobar que si (a_1,a_2,a_3) es base ortonormada, se tiene:
$a_1 \wedge a_2 = a_3$, $a_1 \wedge a_3 = -a_2$, $a_2 \wedge a_3 = a_1$.

4. Resolver el sistema: $X \wedge a = b$, $Xc = t$, con a , $c \neq \overline{0}$.

<u>Producto mixto</u>.

DEFINICION 4: Dada una terna de vectores (a_1,a_2,a_3), se llama <u>producto mixto</u> de la terna, al escalar: $a_1(a_2 \wedge a_3)$. Se indica: $(a_1 a_2 a_3)$.

<u>Propiedades</u>:

1ª) Si las coordenadas de a_i son (x_i,y_i,z_i), se tiene:

$(a_1 a_2 a_3)$ = determinante de $[x_i \; y_i \; z_i]$.

2ª) La aplicación: $V\times V\times V \dashrightarrow \mathbb{R}$, dada por el producto mixto, es trilineal y antisimétrica. Es pues una función determinante sobre V, cuyo valor en cualquier base ortonormada es 1.

3ª) El volumen del paralelepípedo definido por la terna (a_1,a_2,a_3) es igual a $/(a_1a_2a_3)/$.

En efecto, la altura $\underline{h}$ correspondiente a la base (a_1a_2) es la proyección de a_3 sobre $a_1\wedge a_2$; y el área de dicha base es $|a_1\wedge a_2|$. Se tiene por tanto:

$$\text{Volumen} = \frac{|(a_1\wedge a_2)a_3|}{|a_1\wedge a_2|}\,|a_1\wedge a_2| = /(a_1a_2a_3)/.$$

Resulta así que el valor absoluto del producto mixto nos da el volumen citado, y el signo nos da la orientación de la terna (a_1,a_2,a_3).

<u>Identidad del doble producto vectorial.</u>

Sean u,v,w tres vectores cualesquiera. Siempre podemos elegir una base ortonormada, de manera que sea:

$$u = pa_1$$
$$v = ta_1 + sa_2$$
$$w = xa_1 + ya_2 + za_3$$

Entonces se tiene: $u\wedge(v\wedge w) = pa_1\wedge(sza_1 - tza_2 + (ty-sx)a_3) = -ptza_3 + p(ty-sx)(-a_2) = px(ta_1+sa_2) - pt(xa_1+ ya_2+ za_3) = (uw)v - (uv)w$. Para facilitar la memoria, se escribe:

$$u\wedge(v\wedge w) = \begin{vmatrix} v & w \\ uv & uw \end{vmatrix} = (uw)v - (uv)w.$$

<u>Identidad de Lagrange.</u>

Sean a,b,c,d cuatro vectores cualesquiera. Se tiene: $(a\wedge b)(c\wedge d) = a(b\wedge(c\wedge d)) = a[(bd)c - (bc)d] = (bd)(ac) - (bc)(ad)$. Se puede escribir:

$$(a\wedge b)(c\wedge d) = \begin{vmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{vmatrix}$$

<u>3.DISTANCIAS. ANGULOS. AREAS Y VOLUMENES.</u>

Sean $P(x_1,y_1,z_1)$ $Q(x_2,y_2,z_2)$ dos puntos de un espacio E euclidiano, dados por sus coordenadas. La distancia $|PQ|$ es la longitud del vector $\overline{PQ}$, ó sea: $[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{\frac{1}{2}}$.

Para hallar el ángulo de dos rectas l y m, es necesario hallar vectores direccionales respectivos. Si estos son: $u(p_1,q_1,r_1)$ y $v(p_2,q_2,r_2)$, el ángulo viene dado por:

$$\cos(l,m) = \frac{p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2}{(p_1^2+q_1^2+r_1^2)^{\frac{1}{2}}(p_2^2+q_2^2+r_2^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (2).$$

Para hallar el ángulo de dos planos, recordemos (pg.123, Teor.4) que $u(p,q,r)$ es un vector del plano vectorial S^2 direccional del plano α: $ax+by+cz+d = 0$, si y solo si: $ap + bq + cr = 0$. Ahora, en coordenadas euclidianas, ello significa que $\bar{n}(a,b,c)$ es un vector generador del S^1 ortogonal a S^2, es decir, un vector perpendicular al plano α. Se dice tambien, vector normal al plano.

Por lo tanto, como el ángulo de dos planos es igual al de sus vectores normales, si otro plano es α': $a'x+b'y+c'z+d' = 0$, el ángulo que forma con α viene dado por:

$$\cos(\alpha,\alpha') = \frac{aa'+bb'+cc'}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}(a'^2+b'^2+c'^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (3).$$

Si un plano viene dado por ecuación vectorial: $P_1+tv+sw$ ó por ecuaciones paramétricas, se deduce un vector normal mediante: $\bar{n} = v\wedge w$ (v. pg.123, fórmula (6)).

EJERCICIOS:

5. Demostrar que un punto P pertenece al plano α: $P_1+tv+sw$, si y solo si: $(\overline{P_1P}.\ v.\ w) = 0$, ó sea: $\overline{P_1P}.\bar{n} = 0$ (ecuación métrica del plano en un E euclidiano).
6. Hallar los ángulos que forma un plano dado, con los planos coordenados.

El ángulo que forma una recta m y el plano α, es complementario del que forma la recta con un vector normal al plano. Por tanto, si un vector direccional de la recta es $u(p,q,r)$, se tiene:

$$\operatorname{sen}(m,\alpha) = \frac{ap+bq+cr}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}(p^2+q^2+r^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (4).$$

<u>Distancia de un punto a un plano</u>.

Sea $P_o(x_o,y_o,z_o)$ y N: $ax + by + cz + d = 0$. Si es Q el pié de la perpendicular de P_o a N, y P_1 un punto de N, la distancia $|P_oQ|$ es la longitud de la proyección de $\overline{P_oP_1}$ sobre el vector normal $\bar{n}$, luego:

$$|P_oQ| = \frac{|a(x_1-x_o)+ b(y_1-y_o)+ c(z_1-z_o)|}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{|ax_o+by_o+cz_o+ d|}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5).$$

Interesa a veces saber si el trozo OQ de perpendicular del origen O al plano N, está por encima del plano Oxy (es decir, si OQ está en el semiespacio <u>positivo</u> de Oxy) ó por debajo. Ocurrirá lo primero, si N corta a Oz en un punto de <u>z</u> positiva, ó sea, si: $-d/c > 0$, y lo segundo si: $-d/c < 0$.

Sea $\bar{u}$ el vector unitario $\overline{OQ}/|OQ|$, y($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) sus coordenadas, que se escriben así por ser los cosenos directores de $\overline{OQ}$; α = ángulo$(\overline{OQ},\overline{OA}_1)$, etc.. Entonces, si escribimos $|OQ| = p$, un punto $P(x,y,z)$ es del plano N, si y solo si: $\overline{OP}.\bar{u} = p$, ó sea:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0 \qquad (6)$$

que es una ecuación implícita de N, <u>llamada</u> <u>ecuación normal</u>.

Para obtener la ecuación normal cuando se coroce una implícita cualquiera: $ax+by+cz+d = 0$, basta por tanto, dividir por $(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}$, y multiplicar por -1 si <u>d</u> fuese positivo.

EJERCICIOS:

7. Hallar la distancia entre un punto y un plano dado por ecuaciones paramétricas, en función de los datos.
8. Hallar la distancia entre los planos paralelos: $ax+by+cz+d = 0$, $ax+by+cz+d' = 0$.

<u>Area de un triángulo</u>.

En la definición de producto vectorial $u\wedge v$, vimos que su longitud es igual al área del paralelogramo definido por u,v.

Se sigue que:

$$\text{Area del triángulo } P_1P_2P_3 = \tfrac{1}{2}|\overline{P_1P_2}\wedge\overline{P_1P_3}| \qquad (7).$$

Volumen de un tetraedro.

Si son $P_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i = 1,2,3,4)$ los vértices de un tetraedro, de la propiedad 3^a del producto mixto se deduce:

$$\text{Volumen del tetraedro } P_1P_2P_3P_4 = \frac{1}{6}\,(\overline{P_1P_2}.\overline{P_1P_3}.\overline{P_1P_4}) =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \qquad (8).$$

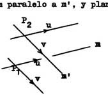
Distancias entre puntos y rectas.

Sea $P_o(x_o,y_o,z_o)$ y m: P_1+ tu. La distancia de P_o a m, es la altura desde P_o al lado opuesto del paralelogramo definido por $(\overline{P_1P_o}, u)$. Por lo tanto:

$$\text{Distancia } P_o - m = \frac{|\overline{P_1P_o} \wedge u\,|}{|u|} \qquad (9).$$

La distancia entre dos rectas paralelas se obtiene como distancia de un punto de una de ellas a la otra.

Sean finalmente, m: P_1+ tu , m': P_2+ sv , dos rectas cualesquiera. Se entiende por distancia entre ambas, al valor: mín.$\{|PQ| \nrightarrow P \in m,\ Q \in m'\ \}$. Se sabe que ese mínimo es igual a la distancia que hay entre los dos planos paralelos siguientes: plano que pasa por m paralelo a m', y plano que pasa por m' paralelo a m.



Por lo tanto, es igual a la altura desde P_2 a la cara opuesta del paralelepípedo definido por $(\overline{P_1P_2}, u, v)$, luego:

$$\text{Distancia m-m'} = \frac{|(\overline{P_1P_2}\ u\ v)|}{|u \wedge v|} \qquad (10).$$

EJERCICIOS:

9. Demostrar que si las rectas m,m' no son paralelas, existe una sola recta secante común y perpendicular a ambas.
10. Probar que la mínima distancia entre dos rectas que se cruzan, es la existente entre los puntos en que son cortadas por la secante perpendicular común.
11. Dadas dos rectas que se cruzan, hallar los puntos precedentes (puntos centrales).
12. Determinar puntos, rectas ó planos que satisfagan a condiciones de distancia ó angulares dadas.
13. Determinar puntos, rectas ó planos que satisfagan condiciones de áreas ó volúmenes dados.
14. Hallar el volumen de un poliedro dado.

LECCION 24

1. SUPERFICIE ESFERICA. INTERSECCIONES CON RECTAS O PLANOS.

Lo que se expone en esta Lección es aplicable con muy leves cambios, al estudio de la circunferencia en un plano euclideo. Por ello, creemos que basta realizar el estudio de la superficie esférica.

Sea E un espacio afín euclidiano, en el que referimos todo a un sistema de coordenadas rectangulares.

Sea $C(a,b,c)$ un punto dado, $\underline{r}$ un número real positivo, $P(x,y,z)$ un punto cualquiera, y escribamos: $\overline{OC} = w$, $\overline{OP} = X$.

El punto P dista $\underline{r}$ de C, si y solo si: $(X - w)^2 = r^2$; en coordenadas:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2 \qquad (1),$$

por lo que (1) se dice <u>ecuación implicita</u> de la superficie esférica S de centro C y radio $\underline{r}$, y la: $(X-w)^2 = r^2$, <u>ecuación vectorial</u>.

Si tenemos la recta m de ecuación vectorial: $X = \overline{OP}_0 + tu$, los puntos comunes a m y S vienen dados por los valores de $\underline{t}$

que sean soluciones de la ecuación:

$$(p_o + tu - w)^2 = r^2 \ , \ (p_o - w)^2 + 2t(p_o - w)u + t^2u^2 = r^2 \ ,$$

donde: $p_o = \overline{OP}_o$.

Si el punto P_o de m pertenece a S, $(p_o - w)^2 = r^2$, y se tiene:

$$2t(p_o - w)u + t^2u^2 = 0 \qquad (2).$$

Las soluciones de (2) son: $t_1 = 0$, $t_2 = -2(p_o - w)u/u^2$; se sigue que: 1°) una recta tiene a lo más dos puntos comunes con S , 2°) la recta m es tangente en P_o si y solo si: $t_2 = 0 \Leftrightarrow (p_o - w)u = 0 \Leftrightarrow$ m es perpendicular al radio CP_o.

TEOREMA 1: Las rectas tangentes a S en P_o componen el plano de ecuación: $(X - p_o)(p_o - w) = 0$.

Demostración: En efecto, según lo que precede, si P_o es un punto de S, la recta P_oP es tangente si y solo si: $(p_o - w).\overline{P_oP} = 0$, ó sea, el punto P pertenece a una tangente en P_o si y solo si: $\overline{OP} = X$ verifica: $(p_o - w)(X - p_o) = 0$. <>

DEFINICION 1: El plano que forman las rectas tangentes a S en P_o, se llama <u>plano tangente</u> en P_o.

Según lo anterior, tiene por ecuación implícita:

$$(x - x_o)(x_o - a) + (y - y_o)(y_o - b) + (z - z_o)(z_o - c) = 0 \ .$$

Para estudiar la intersección de S con un plano α, podemos elegir el sistema coordenado de manera que el plano α sea el $z = 0$. Entonces, la intersección viene dada por el sistema de ecuaciones:

$$z = 0 \ , \ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 - c^2 \qquad (3).$$

Teniendo en cuenta que $|c|$= distancia del centro C al plano α, se sigue que pueden darse los casos siguientes:

1°) $|c| < r$, ó sea: $r^2 - c^2 > 0$. Entonces, (3) es una circunferencia de centro (a,b,0) y radio $(r^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}$. El plano α se dice <u>secante</u>.

2°) $|c| = r$, $r^2 - c^2 = 0$; (3) define un solo punto (a,b,0), y el plano α es el tangente en dicho punto.

3°) $|c| > r$, $r^2 - c^2 < 0$; (3) no tiene solución y el plano

α se dice <u>exterior</u> a S.

EJERCICIOS:

1. Demostrar que la ecuación: $ex^2+ey^2+ez^2+2ax+2by+2cz+d = 0$ es la ecuación de una superficie esférica si y solo si: $a^2+b^2+c^2- ed > 0$. Además, determinar el centro y el radio.
2. Hallar la ecuación de una superficie esférica determinada por datos diversos.

2. POTENCIA DE UN PUNTO RESPECTO DE UNA SUPERFICIE ESFERICA.

Sea como antes, la superficie esférica de ecuación: $(X - w)^2 = r^2$, y P_o un punto cualquiera del espacio; $\overline{OP}_o = p_o$.

Si trazamos por P_o una recta secante, y son P_1, P_2 los puntos de corte con S, consideremos el número real cuyo valor absoluto es $|P_oP_1|.|P_oP_2|$ y cuyo signo es + ó - según que los vectores $\overline{P_oP_1}$ y $\overline{P_oP_2}$ sean del mismo ó distinto sentido. Es decir, el número igual al producto escalar: $\overline{P_oP_1}.\overline{P_oP_2}$.

TEOREMA 2: El producto escalar: $\overline{P_oP_1}.\overline{P_oP_2}$, solo depende de P_o y S, pero no de la recta P_oP_1.

Demostración: Ya vimos que los puntos de corte de la recta m: $X = p_o+ tu$, con S, vienen dados por las soluciones ~~xx~~ t_1,t_2 de la ecuación:

$$t^2u^2+ 2t(p_o-w)u + (p_o-w)^2- r^2 = 0 \qquad (4).$$

Se tiene pues: $\overline{OP}_1 = p_o+ t_1u$, $\overline{OP}_2 = p_o+ t_2u$; $\overline{P_oP}_1 = t_1u$, $\overline{P_oP}_2 = t_2u$; $\overline{P_oP}_1.\overline{P_oP}_2 = t_1t_2u^2$. Pero de (4) se sigue que: $t_1t_2 = [(p_o-w)^2- r^2]/u^2$, luego queda:

$$t_1t_2u^2 = (p_o-w)^2- r^2 \qquad (5),$$

lo cual prueba la tesis. <>

DEFINICION 2: El número: $(p_o- w)^2- r^2$, se llama <u>potencia</u> del punto P_o respecto de la superficie esférica S.

Observando que $(p_o- w)^2$ es el cuadrado de la distancia de P_o al centro C, se sigue de (5) que: si el punto es exterior, la potencia es positiva; si interior, negativa; si contenido en S, la potencia es cero.

EJERCICIO:

3. Demostrar que si P_o es exterior y P_oP_1 es recta tangente a S, la potencia de P_o es igual al cuadrado de la distancia de P_o al punto de contacto.

El conjunto de puntos de S y de los interiores a S, se llama <u>esfera</u> como sabemos. Por abreviar, diremos esfera S cuando no dé lugar a confusión.

<u>Plano radical de dos esferas.</u>

TEOREMA 3: El conjunto de los puntos que tienen la misma potencia respecto de dos esferas, es un plano. Se dice <u>plano radical</u> de ambas.

Demostración: Sean S: $(X-w)^2 = r^2$, S': $(X-w')^2 = r'^2$; un punto P tiene la misma potencia respecto de S y S', si y solo si $\overline{OP} = X$ cumple:

$$(X-w)^2 - r^2 = (X-w')^2 - r'^2 \ , \ (X-w)^2 - (X-w')^2 = r^2 - r'^2.$$

Pero el primer miembro de la última igualdad es igual a: $(2X - w - w').(w'-w)$, luego queda:

$$(X - \tfrac{1}{2}(w+w'))(w'-w) = (r^2 - r'^2)/2 \qquad (6)$$

que es la ecuación vectorial de un plano. <>

De (6) se sigue que el plano radical de dos esferas es perpendicular a la recta que une los centros, ya que: $\overline{CC'} = w' - w$.

EJERCICIOS:

4. Escribir la ecuación implicita del plano radical (6).
5. Hallar el plano radical de dos esferas dadas por ecuaciones implicitas cualesquiera.

LECCION 25

1.CONICAS. EXPRESIONES COORDENADAS.

Sea E un plano euclidiano, (x,y) un sistema de coordenadas rectangulares.

DEFINICION 1: Llamamos <u>cónica</u> del plano E, al conjunto de puntos $P(x_1,y_1)$ cuyas coordenadas constituyen solución de una ecuación de segundo grado en (x,y):

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_o = 0 \qquad (1).$$

De segundo grado implica que alguno de los coeficientes $a_{ij} \neq 0$, pues si no, la (1) sería la ecuación de una recta.

En lo sucesivo, indicaremos con X la matriz columna, traspuesta de $[1\ x\ y]$, y por tanto: $X' = [1\ x\ y]$. Si además ponemos:

$$A = \begin{pmatrix} a_o & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_{11} & a_{12} \\ a_2 & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

la ecuación (1) se puede escribir en forma matricial:

$$X'AX = 0 \qquad (2).$$

<u>Notemos</u> el cambio de notación respecto de Lecciones anteriores (v. Lecciones 20 y 21), en que hemos usado expresiones del tipo (2), pero donde: $X' = [x^1,\dots,x^n]$.

<u>Matrices coordenadas de una cónica dada</u>.

Se sabe que dos ecuaciones tienen las mismas soluciones si una de ellas se deduce de la otra mediante multiplicación por un número $\neq 0$. Por lo tanto, si A es matriz coordenada de una cónica K en un cierto sistema coordenado, tambien lo es cA $(c \neq 0)$ en el mismo sistema.

Por otra parte, si es: $X = P\bar{X}$ un cambio de coordenadas rectangulares (escrito con la nueva notación), la ecuación (2) se transforma en: $\bar{X}'P'AP\bar{X} = 0$, luego la matriz $P'AP$ es coordenada de K en el sistema $\bar{X}$.

En resumen, el conjunto de matrices coordenadas de una cónica dada K, en todos los sistemas posibles de coordenadas rectangulares, es:

$$\{B \mid B = cP'AP \text{ , } c \in \mathbb{R}^*, \ P \in GE(3)\} \qquad (M),$$

donde GE(3) representa el conjunto de matrices del tipo:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p^1 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ p^2 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

EJERCICIOS:

1. Comprobar que el conjunto GE(3) es grupo con la operación producto de matrices (grupo euclidiano de orden 3).
2. Probar que las clases (M) constituyen una partición del conjunto de matrices simétricas reales de orden 3.

2. PROPIEDADES AFINES.

Con la forma (2) se facilita notablemente el estudio de las propiedades afines de la cónica, esto es, de las propiedades como conjunto de puntos de un plano afín real.

Intersección con una recta.

Sea m una recta de ecuaciones paramétricas: $x = x_1+t(x_2-x_1)$ $y = y_1+ t(y_2-y_1)$, determinada por dos puntos $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$. Podemos escribir como ecuación de m:

$$X = sX_1+ tX_2 \quad (s + t = 1).$$

Entonces, se ve que los puntos comunes a m y a la cónica K de ecuación (2), vienen dados por las soluciones (s,t) del sistema: $(sX_1'+ tX_2')A(sX_1+ tX_2) = 0$, $s + t = 1$; ó sea:

$$s^2(X_1'AX_1) + 2st(X_1'AX_2) + t^2(X_2'AX_2)= 0 \text{ , } s+t = 1 \quad (3)$$

donde se han reunido los términos en st y ts, ya que: $X_1'AX_2 = X_2'AX_1$, por ser A simétrica.

Los casos que pueden presentarse son:

1°) El sistema (3) no tiene solución. La recta se dice exterior a K.

2°) Existe al menos una solución (s_1,t_1); no hay inconveniente en elegir el punto correspondiente como punto P_1, con lo cual la solución citada es $(1,0)$, y $X_1'AX_1 = 0$. Excluida esta solución, el sistema queda:

$$2s(X_1'AX_2) + t(X_2'AX_2) = 0 \ , \ s+t = 1 \qquad (4).$$

Si además: $X_1'AX_2 \neq 0$, el sistema (4) tiene una sola solución $(s_2,t_2) \neq (1,0)$ o ninguna. La recta se dice <u>secante</u>.

3°) Existe la solución $(1,0)$ y además, en (4) se tiene: $X_1'AX_2 = 0$, $X_2'AX_2 \neq 0$. Entonces, el sistema (4) tiene una sola solución, que es tambien la $(1,0)$. Se dice que la recta es <u>tangente</u> a K en P_1, pues se considera que tiene con K dos puntos comunes confundidos en P_1, el cual se dice <u>punto de contacto</u> de m.

4°) Existe la solución $(1,0)$ y además, en (4) se tiene: $X_1'AX_2 = 0$, $X_2'AX_2 = 0$. Entonces, cualquier $(s,t) \ni s+t = 1$ es solución, y por tanto, todos los puntos de m son de K es decir, $m \subset K$. La recta se dice <u>generatriz</u> de K.

Se deduce que si P_1 es un punto de K tal que: $X_1'A \neq (0)$, la ecuación: $X_1'AX = 0$, da la única tangente (ó generatriz) en P_1.

TEOREMA 1: Si K posee una generatriz, es igual a un par de rectas (distintas ó confundidas).

Demostración: Elegimos un sistema de referencia cuyo eje Ox sea la generatriz, lo cual siempre se puede hacer. En dicho sistema, la ecuación (1) se anula para $(x,0)$ $\underline{x}$ cualquiera, luego: $a_{11} = a_1 = a_0 = 0$, y la ecuación es:

$y(2a_{12}x + a_{22}y + 2a_2) = 0$, lo que prueba la tesis. <>

<u>Puntos singulares</u>.

En el caso anterior, un punto $P_0(x_0,y_0)$ común a las dos generatrices (que será único si son distintas), cumple: $y_0 = 0$, $2a_{12}x_0 + 2a_2 = 0$. Como ahora es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & a_{12} \\ a_2 & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

se comprueba facilmente que: $X_0'A = (0)$, ó: $AX_0 = (0)$.

La propiedad: $AX_o = (0)$, no depende del sistema coordenado elegido. En efecto, si se aplica un cambio cualquiera de coordenadas: $X = P\bar{X}$, se tiene: $B = P'AP$, $\bar{X}_o = P^{-1}X_o$, luego: $B\bar{X}_o = P'APP^{-1}X_o = P'AX_o = P'(AX_o) = (0)$.

DEFINICION 2: Un punto $P_o(x_o,y_o)$ tal que: $X_o'A = (0)$, se llama <u>punto singular</u> ó <u>punto doble</u> de K. Un punto no singular se dice <u>simple</u>.

Para que exista algún punto singular, es necesario evidentemente, que la matriz A no sea regular. En tal caso, la cónica se dice <u>singular</u> ó <u>degenerada</u>; si por el contrario, A es regular, la cónica se dice <u>regular</u> ó <u>no degenerada</u>.

TEOREMA 2: Una recta m que pase por punto doble P_1, ó es tangente en P_1, ó es generatriz.

Demostración: En efecto, si es P_2 otro punto de m, los puntos comunes a m y K vienen dados por el sistema (3); pero siendo ahora: $X_1'A = (0)$, se sigue que los dos primeros coeficientes de (3) son cero, lo cual nos conduce necesariamente al caso 3° ó al caso 4° de intersección. <>

COROLARIO 2.1: Cualquier recta que une un punto doble con <u>otro</u> punto de la cónica, es generatriz.

DEFINICION 3: El conjunto de los puntos dobles de una cónica se llama <u>vértice</u> de la misma.

EJERCICIOS:

3. Hallar la intersección de una recta y una cónica dadas.
4. Demostrar que el vértice de una cónica, si existe, es un punto ó una recta.
5. Hallar los centros de simetria de una cónica dada.

<u>3.ECUACION CANONICA METRICA. INVARIANTES METRICOS</u>.

El estudio de las propiedades de una cónica particular, es evidente que se facilitará utilizando una ecuación lo más sencilla posible.

TEOREMA 3: Dada una cónica K, existe un sistema de coordenadas rectangulares en el cual, la ecuación de K es una de las siguientes:

1°) $c_1x^2 + c_2y^2 = 1$, $c_1 \neq 0$ ($c_2 \neq 0 \Rightarrow c_1 \geq c_2$).

2°) $c_1x^2 = 2y$, $c_1 > 0$.

3°) $x^2 + c_2y^2 = 0$, $1 \pm c_2 \geq 0$.

Demostración: Sea $X'AX = 0$ la ecuación de K en un sistema coordenado inicial. Indiquemos con A^* la matriz que resulta de A suprimiendo la primera fila y columna. Sabemos (v. pg.155, Corol.11.3) que existe una matriz ortogonal Q tal que $Q'A^*Q$ es diagonal. Por ello, realizando el giro de ejes: $X = P\bar{X}$, donde $P^* = Q$, se tiene como nueva ecuación de la cónica:

$$d_1x^2 + d_2y^2 + 2b_1x - 2b_2y - b_o = 0 \qquad (5),$$

donde podemos suponer $[d_1, d_2]$ canónica (v. pg.157). Por hipótesis es $d_1 \neq 0$; si tambien $d_2 \neq 0$, efectuamos la traslación de ejes: $x = \bar{x} + b_1/d_1$, $y = \bar{y} + b_2/d_2$, resultando la ecuación:

$$d_1x^2 + d_2y^2 = d_o \qquad (6).$$

Si es : $d_2 = 0$, hacemos el cambio: $x = \bar{x} + b_1/d_1$, $y = \bar{y}$, resultando entonces:

$$d_1x^2 = 2b_2y + d_o \qquad (7).$$

Pueden darse tres casos posibles:

1°) $d_o \neq 0$ y además en (7) $b_2 = 0$. Entonces, dividimos la ecuación (6) ó (7) por d_o, y si d_o es negativo, efectuamos en (6) una permutación de coordenadas para que quede $c_1 \geq c_2$.

2°) En (7) $b_2 \neq 0$. Entonces, realizamos la traslación de ejes: $x = \bar{x}$, $y = \bar{y} - d_o/2b_2$, con lo cual la nueva ecuación es la (7) pero con $d_o = 0$. A continuación, dividimos la ecuación por b_2, y si d_1/b_2 es negativo, efectuamos el giro de ejes: $x = -\bar{x}$, $y = -\bar{y}$.

3°) $d_o = 0$ y además en (7) $b_2 = 0$. Si es necesario, multiplicamos por -1 y efectuamos una permutación de coordenadas para que los coeficientes cuadráticos cumplan las condiciones del enunciado. Finalmente, dividimos la ecuación por d_1.

El teorema queda demostrado. <>

TEOREMA 4: Si la ecuación $X'CX = 0$ de una cónica K, es una de las citadas en el enunciado anterior, dicha ecuación está determinada univocamente por K.

Demostración: Sea $X'AX = 0$ una ecuación dada de K. Sabemos (v. pg.174) que: $C = cP'AP$, $c \neq 0$, $P \in GE(3)$. Se comprueba fácilmente que: $C^* = cQ'A^*Q$, donde $Q = P^*$ ortogonal.

Ahora bien, por ser P y P* regulares, se sigue: rang C = rang A , rang C* = rang A*. Esto indica que A determina el tipo de ecuación C, ya que los tipos 1°, 2° y 3° vienen caracterizados porque: rang C − rang C* = 1, 2, 0, respectivamente.

Por otra parte, notemos que en el paso de la ecuación A a la ecuación C realizado en el Teorema precedente, si llamamos B a la matriz de la ecuación (5), se tiene:

1) la ecuación secular de B* es la misma de A*, ya que: $B^* = Q'A^*Q$, donde Q es ortogonal. Por ello, los coeficientes d_1, d_2, de (5) están determinados por A.

2) Los coeficientes de x^2 e y^2 de C, son proporcionales a los de B.

Con lo anterior, en el caso 3°, la ecuación C queda perfectamente determinada.

En los otros dos casos, interesa notar que la ecuación secular de B es la misma de A, ya que: $B = P'AP$, donde P es la matriz de un giro de ejes, luego ortogonal. Siendo $|A - xI| = |B - xI|$, los coeficientes de la misma potencia de $\underline{x}$ en ambos polinomios son iguales. Pero se sabe que el coeficiente de x^{3-i} en $|A-xI|$ es: $(-1)^{3-i}A_i$, donde A_i es la suma de los menores principales de orden $\underline{i}$ de A. Por lo tanto, $A_i = B_i$ $(i = 1,2,3)$.

Ahora bien, llamando $\underline{r}$ al rang A* = rang B*, se tiene que en el caso 1°, si $r = 2$: $B_3 = (-b_0 - b_1^2/d_1 - b_2^2/d_2)d_1d_2 = -d_0d_1d_2$

y como: $B_3 = A_3$, se sigue: $d_o = A_3/-d_1d_2$, luego queda determinada la ecuación (6) y por tanto la C. Si $r = 1$: $B_2 = (-b_o - b_1^2/d_1)d_1 = -d_od_1$, luego: $d_o = A_2/-d_1$, y la ecuación C queda definida.

En el caso 2°, $B_3 = -b_2^2d_1$, luego: $b_2^2 = A_3/-d_1$, y la ecuación C queda determinada. <>

COROLARIO 4.1: En la clase (M) de las matrices coordenadas (en sistemas rectangulares) de una cónica dada (v. pg.174), la matriz C precedente es representante canónico de la clase.

DEFINICION 4: La ecuación $X'CX = 0$ anterior, se dice <u>ecuación canónica métrica</u> de la cónica K.

DEFINICION 5: Los coeficientes de la ecuación canónica métrica de K, ó cualquier función de ellos, se dicen <u>invariantes métricos</u> de la cónica.

El significado geométrico de estos invariantes se verá en el párrafo siguiente, en cada caso particular.

EJERCICIOS:

6. Dada una ecuación de una cónica en coordenadas rectangulares, obtener la ecuacián canónica métrica.

4.CLASIFICACION AFIN DE LAS CONICAS.

En virtud del Teorema 3 anterior, las ecuaciones canónicas citadas representan todas las cónicas posibles, y en virtud del Teorema 4, dos ecuaciones canónicas distintas no pueden representar la misma cónica. De modo que, estudiando las cónicas dadas por todas las ecuaciones canónicas posibles, veremos cada cónica una sola vez.

Haremos esto, pero agrupando las ecuaciones con el siguiente criterio: colocaremos en la misma clase las ecuaciones que coincidan en: rang C, rang C* y número de c_i positivos. Como estos tres números son invariantes en cambios de coordenadas afines, la clasificación obtenida se dice afin.

Notemos que las ecuaciones de la misma clase afin son del mismo tipo (v. Teorema 3), ya que cada tipo viene caracterizado por el número: rang C - rang C*. Por ello, iremos enumerando las clases afines posibles, comenzando por las del tipo 1°, después 2° y por último 3°.

En fin, advertimos que los coeficientes c_i positivos se escribirán en la forma: $1/a^2$, y los negativos: $-1/a^2$.

TIPO 1°)

Elipse: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Se trata de la conocida elipse, cuyo eje mayor es aquí $(0,b)(0,-b)$, y el menor: $(a,0)(-a,0)$. Si $a = b$, la elipse es una circunferencia.

Hipérbola : $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$

Es una hipérbola cuyo eje trasverso es $(a,0)(-a,0)$, y cuyos focos son: $(\pm(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}},0)$. Si $a = b$, la hipérbola se dice "equilátera".

Elipse imaginaria: $-x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$.

No posee punto alguno; por tanto, carece de interés como conjunto de puntos.

Par de rectas paralelas: $x^2/a^2 = 1$.

La distancia entre ambas es 2a.

Par de rectas paralelas imaginarias: $-x^2/a^2 = 1$.

No posee punto alguno.

TIPO 2°)

Parábola: $x^2/a^2 = 2y$.

Es una parábola cuya directriz es la recta: $y = -a^2/2$, y foco: $(0,a^2/2)$.

TIPO 3°)

Par de rectas secantes imaginarias: $x^2 + y^2/b^2 = 0$.

Solo posee el punto $(0,0)$.

<u>Par de rectas secantes:</u> $x^2 - y^2/b^2 = 0$.

El ángulo α que forman cumple: $\operatorname{tg} \alpha/2 = b$.

<u>Recta doble:</u> $x^2 = 0$.

EJERCICIOS:

7. Comprobar en el caso de la elipse (hipérbola) que la suma (diferencia) de las distancias de un punto a los dos focos, es constante.
8. Comprobar en el caso de la parábola, que las distancias de un punto al foco y a la directriz, son iguales.

LECCION 26

1. CUADRICAS. EXPRESIONES COORDENADAS.

Sea E un espacio euclidiano, (x,y,z) un sistema de coordenadas rectangulares.

DEFINICION 1: Llamamos <u>cuádrica</u> del espacio E, al conjunto de puntos $P(x_1,y_1,z_1)$ cuyas coordenadas constituyen solución de una ecuación de segundo grado en (x,y,z):

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$
$$+ 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_o = 0 \qquad (1)$$

En este párrafo, indicamos con X la matriz traspuesta de la $[1\ x\ y\ z]$ y por tanto: $X' = [1\ x\ y\ z]$. Si además ponemos:

$$A = \begin{pmatrix} a_o & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

la ecuación (1) se puede escribir en forma matricial:

$$X'AX = 0 \qquad (2).$$

La forma en que hemos desarrollado la Lección anterior sobre cónicas, es aplicable al caso de cuádricas sin apenas variación, y por ello, en la Lección presente nos limitaremos a exponer las variaciones necesarias, y los resultados. El detalle de repetir absolutamente todos los razonamientos, debe realizarlo el lector, como Ejercicio muy conveniente para la comprensión del tema.

Matrices coordenadas de una cuádrica dada.

El conjunto de las matrices coordenadas de la cuádrica K dada por (1), en todos los sistemas rectangulares posibles, es:

$$\{B \mid B = cP'AP \ , \ c \in \mathbb{R}^*, \ P \in GE(4)\} \qquad (3),$$

donde GE(4) representa el conjunto de matrices del tipo:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p^1 & & & \\ p^2 & & P^* & \\ p^3 & & & \end{pmatrix} \ , \ P^* \text{ ortogonal directa;}$$

GE(4) es el grupo euclidiano de orden 4.

2. PROPIEDADES AFINES.

Con la forma (2) se facilita notablemente el estudio de las propiedades afines de las cuádricas, esto es, de las propiedades cómo conjunto de puntos de un espacio afín real.

Intersección con una recta.

Si es m la recta determinada por dos puntos $P_1(x_1,y_1,z_1)$ $P_2(x_2,y_2,z_2)$, los puntos comunes a m y a la cuádrica K de ecuación (2), vienen dados por las soluciones (s,t) del sistema:

$$s^2(X_1'AX_1) + 2st(X_1'AX_2) + t^2(X_2'AX_2) = 0 \ , \ s+t = 1 \qquad (4).$$

Los casos que pueden presentarse son:

1°) El sistema (4) no tiene solución; la recta se dice exterior a K.

2°) El sistema posee una solución, que se puede suponer es la (1,0), es decir, que: $X_1'AX_1 = 0$, y que además: $X_1'AX_2 \neq 0$. Entonces, la intersección consiste en P_1 y otro punto, ó en P_1 solo; la recta se dice secante.

3°) $X_1'AX_1 = 0$ y $X_1'AX_2 = 0$, pero: $X_2'AX_2 \neq 0$. Entonces, el sistema (4) tiene la solución (1,0) doble; la recta m se dice tangente en P_1, y este se dice punto de contacto de m.

4°) Los tres coeficientes de la primera ecuación de (4) son nulos. Entonces, todo punto de m es de K; la recta se dice generatriz.

TEOREMA 1: Si P_1 es un punto de K tal que: $X_1^t A \neq (0)$, el conjunto de tangentes y generatrices por P_1, componen un plano α.

Demostración: En efecto, si la recta P_1P_2 es tangente ó generatriz, hemos visto que: $X_1^t A X_2 = 0$, luego: P_2 pertenece al plano α de ecuación: $X_1^t A X = 0$.

Recíprocamente, si $P_2 \in \alpha$, ello nos conduce al caso 3° ó al 4° precedentes, luego la recta P_1P_2 es tangente ó generatriz.<>

Notemos que la desigualdad: $X_1^t A \neq (0)$, es independiente del sistema coördenado, por lo cual tiene sentido la siguiente

DEFINICION 2: Un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ tal que: $X_1^t A \neq (0)$ se dice punto simple de K. En el caso contrario: $X_1^t A = (0)$, el punto se dice singular ó doble.

Si una cuádrica posee algún punto doble, se sigue evidentemente: $|A| = 0$. En tal caso, la cuádrica se dice singular, y regular en caso contrario, es decir, si A lo es.

TEOREMA 2: Toda recta que pase por un punto doble P_1, ó es tangente en P_1, ó es generatriz.

Demostración: La misma del Teorema 2 de la Lección anterior (pg.176).

COROLARIO 2.1: Cualquier recta que une un punto doble con otro punto de la cuádrica, es generatriz.

DEFINICION 3: El conjunto de puntos dobles de una cuádrica se llama vértice de la misma.

EJERCICIOS:

1. Hallar la intersección de una recta y una cuádrica dadas.
2. Probar que la intersección de un plano y una cuádrica es vacía ó es una cónica.

3. Probar que una cuádrica de ecuación $X'AX = 0$ puede ser singular y no tener puntos dobles.
4. Demostrar que el vértice de una cuádrica, si existe, es un punto, una recta ó un plano.
5. Demostrar que si una cuádrica contiene un plano, es igual a un par de planos (distintos ó coincidentes).

3.ECUACION CANONICA METRICA. INVARIANTES METRICOS.

Para obtener las ecuaciones canónicas en el caso de cuádricas, resulta muy conveniente utilizar la notación (x_1,x_2,x_3) en vez de la (x,y,z), y así lo haremos en este párrafo.

TEOREMA 3: Dada una cuádrica K, existe un sistema de coordenadas rectangulares en el cual, la ecuación de K es una de las siguientes:

1°) $c_1x_1^2+\dots+c_rx_r^2 = 1 \quad , c_i \neq 0 \quad , r \geq 1.$

2°) $c_1x_1^2+\dots+c_rx_r^2 = 2x_{r+1} \quad , c_i \neq 0 \quad , r \geq 1.$

3°) $c_1x_1^2+\dots+c_rx_r^2 = 0 \quad , c_i \neq 0 \quad , c_1 = 1.$

donde la sucesión $(c_1,\dots,c_r)$ es no creciente. Además, en los tipos 2° y 3°, el número de c_i positivos es igual ó mayor que el de negativos, y si es igual, $c_1 + c_2 \geq 0$.

Demostración: Sea $X'AX = 0$ la ecuación de K en un sistema coordenado inicial. Sabemos que existe una matriz ortogonal Q tal que $Q'A^*Q$ es diagonal; por tanto, realizando el giro de ejes: $X = P\bar{X}$, donde $P^* = Q$, se tiene como nueva ecuación de la cuádrica:

$$d_1x_1^2+\dots+d_rx_r^2 - 2b_1x_1 - 2b_2x_2 - 2b_3x_3 - b_o = 0 \qquad (5),$$

donde: $d_i \neq 0$, $r \geq 1$.

Efectuando ahora la traslación de ejes:

$$x_i = \bar{x}_i + b_i/d_i \ (i \leq r) \ , \quad x_j = \bar{x}_j \ (j > r)$$

resulta la ecuación:

$$d_1x_1^2+\dots+d_rx_r^2 = 2b_{r+1}x_{r+1} + 2b_3x_3 + d_o \qquad (6),$$

donde: $d_o = b_o + b_1^2/d_1+\dots+b_r^2/d_r$. Notemos que, como $3 \geq r \geq 1$, el segundo miembro tendrá 0, 1 ó 2 términos lineales.

En (6) pueden darse tres casos:

1°) Todo $b_i = 0$ y $d_o \neq 0$. Entonces, dividimos la ecuación por d_o, y después efectuamos una permutación de coordenadas para que queden los c_i en orden no creciente.

2°) Algún $b_i \neq 0$, que podemos suponer es b_{r+1} ya que si no, basta hacer una permutación entre las coordenadas x_{r+1}, x_3. Después efectuamos la traslación de ejes:

$$x_i = \bar{x}_i \ (i \neq r+1) \ , \quad x_{r+1} = \bar{x}_{r+1} - d_o/2b_{r+1}$$

con lo cual se tiene la ecuación (6) pero con $d_o = 0$.

Ahora, consideremos el número positivo: $b = (b_{r+1}^2 + b_3^2)^{\frac{1}{2}}$, es decir, el módulo de la (3-r)-tupla (b_{r+1}, b_3), con lo cual, el segundo miembro de (6) se puede escribir:
$2b(b_{r+1}x_{r+1}/b + b_3x_3/b)$. Teniendo en cuenta que la (3-r)-tupla $(b_{r+1}/b \ , \ b_3/b)$ tiene módulo 1, podemos tomarla como primera fila de una matriz ortogonal directa M de orden 3-r. Realizando pues el cambio de coordenadas:

$$x_i = \bar{x}_i \ (i \leq r) \ , \quad [\bar{x}_j] = M[x_j] \quad (j > r)$$

se tiene como nueva ecuación:

$$d_1x_1^2 + \ldots + d_rx_r^2 = 2bx_{r+1} \qquad (7).$$

Ahora, si el número s de d_i positivos es menor que el r-s de negativos, se multiplica la ecuación por -1, se hace una permutación de las coordenadas x_1, x_2 para que queden los c_i en orden no creciente, y se realiza el cambio:

$$x_1 = \bar{x}_1 \ , \quad x_i = \bar{x}_i \ (i \neq 1, r+1) \ , \quad x_{r+1} = -\bar{x}_{r+1}$$

con objeto de que el segundo miembro quede positivo.

Análogamente se hará, si en (7) es: s = r-s (ó sea: $d_1d_2 < 0$) y $d_1 + d_2 < 0$.

Si s > r-s , basta realizar una permutación de las coordenadas x_1, x_2 para que queden los coeficientes cuadráticos en orden no creciente.

Finalmente, se divide la ecuación por b.

3°) Todo $b_i = 0$ y $d_o = 0$. Si es preciso, multiplicamos la ecuación (6) por -1 y efectuamos una permutación de las coordenadas $x_1,\dots,x_r$ para que los coeficientes cuadráticos cumplan las condiciones del enunciado. Finalmente, dividimos la ecuación por d_1. <>

TEOREMA 4: Si la ecuación $X'CX = 0$ de una cuádrica K es una de las escritas en el enunciado anterior, dicha ecuación está univocamente determinada por K.

Demostración: Sea $X'AX = 0$ una ecuación dada de K. Podemos repetir aquí lo expuesto en el Teorema 4 de la Lección 25 (v. pg.178), sustituyendo GE(3) por GE(4), (d_1,d_2) por $(d_1,\dots,d_r)$ y (x^2,y^2) por $(x_1^2,\dots,x_r^2)$, hasta llegar a: $A_i = B_i$ $(i = 1,2,3,4)$.

Ahora, en el caso 1°, como: $b_{r+1} = b_3 = 0$, la suma B_{r+1} se compone de un solo menor que vale:
$(-b_o - b_1^2/d_1 - \dots - b_r^2/d_r)d_1 \cdot\,\cdot\,\cdot d_r = -\,d_o d_1 \cdot\,\cdot\,\cdot d_r$, y siendo $B_{r+1} = A_{r+1}$, se sigue: $d_o = A_{r+1}/-d_1\dots d_r$, luego queda determinada la ecuación (6) y por tanto la C.

En el caso 2°: $B_{r+2} = -b_{r+1}^2 d_1\dots d_r - b_3^2 d_1\dots d_r$, ya que los demás menores principales de orden r+2 son nulos, por entrar en ellos al menos dos filas (y dos columnas) proporcionales. Como $B_{r+2} = A_{r+2}$, se sigue: $b^2 = A_{r+2}/-d_1\dots d_r$, luego queda determinada la ecuación (7) y con ello la C. <>

COROLARIO 4.1: En la clase (3) de las matrices coordenadas (en sistemas rectangulares) de una cuádrica dada, la matriz C precedente es representante canónico de la clase.

DEFINICION 4: La ecuación $X'CX = 0$ anterior se dice <u>ecuación canónica métrica</u> de la cuádrica K.

DEFINICION 5: Los coeficientes de la ecuación canónica métrica de K, ó cualquier función de ellos, se dicen <u>invariantes métricos</u> de la cuádrica.

Su significado geométrico se pone de manifiesto en cada caso particular.

Es interesante notar que esta Lección es fácilmente generalizable al caso de "cuádricas" de un espacio afín euclidiano de dimensión n cualquiera.

EJERCICIOS:

6. Dada una ecuación de una cuádrica en coordenadas rectangulares, obtener la ecuación canónica métrica.

4. CLASIFICACION AFIN DE LAS CUADRICAS.

Enumeramos a continuación las clases afines posibles de cuádricas, siguiendo el mismo criterio utilizado en la clasificación de las cónicas (v. pg.179).

Y usamos de nuevo la notación (x,y,z).

TIPO 1°)

Elipsoide: $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

Es una superficie que puede considerarse formada por las elipses que tienen como eje mayor el $(0,0,c)(0,0,-c)$, y por eje menor un diámetro cualquiera de la elipse: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $z = 0$.

Si $a = b$, el elipsoide se dice de revolución en torno del eje Oz; las elipses anteriores son todas iguales (meridianos) y las secciones por planos secantes perpendiculares al eje Oz son circunferencias (paralelos).

Si $a = b = c$, el elipsoide es una superficie esférica.

Hiperboloide alabeado: $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$.

Es una superficie que puede considerarse formada por las hipérbolas que tienen por eje no transverso el $(0,0,ic)$ $(0,0,-ic)$, y por eje transverso un diámetro de la elipse: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $z = 0$ (elipse de garganta).

Si $a = b$, el hiperboloide se dice de revolución en torno de Oz; las hipérbolas antedichas son iguales y las secciones por planos perpendiculares al eje Oz son circunferencias.

<u>Hiperboloide ordinario</u>: $x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$.

Se trata de una superficie que puede considerarse formada por las hipérbolas que tienen como eje transverso el (a,0,0) (-a,0,0) y que cortan a la elipse: $y^2/b^2 + z^2/c^2 = 3$, $x = 2a$.

Si $b = c$, el hiperboloide se dice de revolución en torno del eje Ox; las hipérbolas precedentes son iguales y las secciones por planos secantes normales al eje son circunferencias.

<u>Elipsoide imaginario</u>: $-x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$.

No posee punto alguno; por ello, carece de interés como conjunto de puntos.

<u>Cilindro elíptico</u>: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Es una superficie que puede considerarse formada por las elipses: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, z = constante; ó tambien, por las rectas paralelas a Oz y que cortan a la elipse:
$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $z = 0$.

Si $a = b$, el cilindro es de revolución en torno de Oz.

<u>Cilindro hiperbólico</u>: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$.

Análogo al anterior, sustituyendo elipse por hipérbola, y b^2 por $-b^2$. No puede ser de revolución.

<u>Cilindro imaginario</u>: $-x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$.

No posee punto alguno.

<u>Par de planos paralelos</u>: $x^2/a^2 = 1$.

La distancia entre ambos es <u>2a</u>.

<u>Par de planos paralelos imaginarios</u>: $-x^2/a^2 = 1$.

No posee punto alguno.

TIPO 2°)

<u>Paraboloide elíptico</u>: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 2z$.

Es una superficie que puede considerarse formada por las elipses: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 2t^2$, $z = t^2$ (t constante).

Si $a = b$, el paraboloide se dice de revolución en torno del eje Oz; las elipses anteriores son circunferencias.

Paraboloide hiperbólico: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 2z$.

Superficie que puede considerarse formada por las hipérbolas: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 2t$, $z = t$ (t constante); para $t > 0$ el eje transverso es paralelo a Ox, y para $t < 0$ paralelo a Oy; para $t = 0$ la hipérbola no es tal sino un par de rectas.

Cilindro parabólico: $x^2/a^2 = 2y$.

Superficie formada por las parábolas: $x^2/a^2 = 2y$, $z =$ constante; ó tambien, por las rectas paralelas a Oz y que cortan a la parábola: $x^2/a^2 = 2y$, $z = 0$.

TIPO 3°)

Cono cuádrico imaginario: $x^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 0$.

Solo posee el punto (0,0,0).

Cono cuádrico: $x^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$.

Superficie formada por las rectas que pasan por el punto (0,0,0) y cortan a la elipse: $x^2 + y^2/b^2 = 1$, $z = c$.

Si $b = 1$, el cono es de revolución en torno de Oz.

Par de planos secantes imaginarios: $x^2 + y^2/b^2 = 0$.

Solo posee la recta: $x = 0$, $y = 0$.

Par de planos secantes: $x^2 - y^2/b^2 = 0$.

El ángulo α que forman es tal que: $\operatorname{tg} \alpha/2 = b$.

Plano doble: $x^2 = 0$.

FE DE ERRATAS

Pág.	Lín.	Dice	Debe decir
4	-9	partes de E,	partes de E, ninguna vacía,
12	18	[b | aRb]	{b | bRa}
13	11	La familia de	El conjunto de
16	6,8	<u>cota</u>	<u>extremo</u>
29	-12	una parte S de G	una parte S (no vacía) de G
29	-3	tiene inverso en S.	tiene inverso en S. Ahora, si a y b son de S, a y b^{-1} son de S, luego <u>ab</u> es de S.
32	-2	(*)	(.)
33	-10	subgrupo invariante	subgrupo
33	-9	subgrupo	subgrupo invariante
35	7	<u>ab</u>.	<u>ab</u>, siendo ab = ba.
46	1	relación '	relación |
47	4	es inversible.	es inversible, 4°) $0 \neq 1$.
48	-1		suprimir esta línea.
52	17		añadir: 3^{a}) $t.\bar{0} = \bar{0}$.
56	8	$S_1 + \dots + S_p$	$S_1 \oplus \dots \oplus S_p$
56	11	<u>proyección</u> p	<u>proyección</u> a una aplicación p
58	11	tanbien	tambien
86	2	$M(n) \longrightarrow End(V)$	$End(V) \longrightarrow M(n)$
99	5	$\alpha^* = t\alpha'$	$\alpha^* = \alpha' t$
99	6	$t\alpha'$	$\alpha' t$
123	8	(6)	(5)
135	-12	$(s+t = 1)$	$(s+t = 1\ ,\ s \geq 0\ ,\ t \geq 0)$
136	5	SEMIPLANOS	SEMIESPACIOS
151	15	Desde luego,	Desde luego, si $p < n$,
175	5	$(s_2,t_2) \neq (1,0)$.	$(s_2,t_2) \neq (1,0)$ ó ninguna.
175	-5	$2a_{12}x +$	$2a_{12}x_o +$
34	-5	Falta probar que todo subgrupo S de Z es un Zp.	
84	-11,-12		suprimirlas.
33	1	$[a] = f^{-1}(a)$	$[a] = f^{-1}(fa)$

INDICE ALFABETICO